Ενότητα 3 – Λύσεις

1α) Είναι ίσα γιατί $\hat{A}=\hat{\Delta}=70$, $AB=\Delta E$ και $B=180-120=60=E$ (Γ−Π−Γ)

β) Είναι ίσα γιατί $A=\Delta=90$, $B\Gamma=\Gamma E$, $\Gamma_1=\Gamma_2$ (κ.κ) (ορθ−Π−Γ)

γ) Δεν είναι ίσα

δ) Είναι ίσα γιατί $A=\Pi=90$, $AM=B\Pi$, $AB=\Gamma\Pi$ ($\Gamma\Pi=\Theta\Pi\Theta$) (ορθ−Π−Π)

ε) Είναι ίσα: $\Delta_1=\Delta_2$, $B_1=B_2$, ΔΒ κοινή (Γ−Π−Γ)

στ) Δεν είναι ίσα

ζ) Δεν είναι ίσα

η) Δεν είναι ίσα.

---

2) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν:

α) οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου τριγώνου. (Π−Π−Π)

β) Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες (Π−Γ−Π)

γ) Μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία αντίστοιχα ίσες. (Γ−Π−Γ)

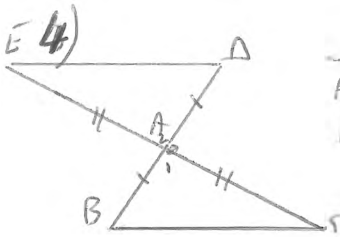
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν:

α) Έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία (Ορθ−Π−Π)

β) Έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες (ορθ−Π−Γ)

---

4)



Δ	Ζ
ΑΒ=ΑΔ	ΔΕ=//ΒΓ
ΑΓ=ΑΕ	

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ

$AB=A\Delta$ (Δ)
$A\Gamma=E$ (Δ)
$A_1=A_2$ (κατακορυφήν)

$\left.\right\}\xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi}$ $\hat{AB\Gamma}=\hat{A\Delta E}$ ⟹ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα.

δηλ. $\Delta E=B\Gamma$ και $\hat{\Delta}=\hat{B}\to B\Gamma\parallel E\Delta$ γιατί οι εντός εναλλάξ είναι ίσες

---

3) Δύο επίπεδα σχήματα είναι ίσα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί με το άλλο.

---

5) $\hat{AO\Delta}=\hat{BO\Gamma}$ γιατί:

$O\Gamma=\Gamma\Delta$ (Δ)
$AO=OB$ (μέσο)
$O_1=O_2$ (κατακορυφήν)

} Π−Γ−Π

---

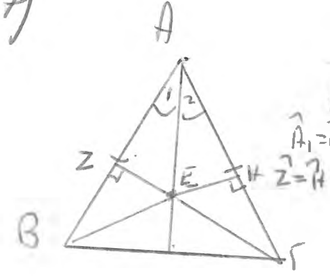
6) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ

$BE=Z\Gamma$ (Δ) ⟹ $B\Gamma=ZE$ (από ίσα ευθ. τμήματα αφαιρώ το ίδιο ευθ. τμ.)
$A\Gamma=\Delta E$ (Δ)
$\Gamma=E$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων)

(Π−Γ−Π)

⟹ $\hat{AB\Gamma}=\hat{\Delta EZ}$ άρα έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. $\hat{A}=\hat{\Delta}$

7)

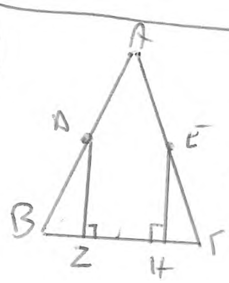


Δ	Ζ
ΑΒ=ΑΓ	ΕΖ=ΕΗ
$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (διχοτ.)	$\triangle BZE = \triangle \Gamma HE$
$\hat{Z}=\hat{H}=90°$ (κάθετ.)	

$\triangle AZE = \triangle AHE$ γιατί:
ΑΕ (κοινή)
$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (Δ)
$\hat{Z}=\hat{H}=90°$ (Δ)
} Ο-Π-Γ ⇒ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΕΖ=ΕΗ (*) αλλά και ΑΖ=ΑΗ (1)

$\triangle BZE = \triangle \Gamma HE$ γιατί:
$\hat{Z}=\hat{H}=90°$ (Δ)
ΕΖ=ΕΗ από (*)
ΒΖ=ΗΓ (ΑΒ=ΑΓ και ΑΖ=ΑΗ (1) από ίσα ευθ. τμήματα αφαιρώ ίσα ευθ. τμήματα)
} Ο-Π-Π ⇒ ~~έχουμε~~ $\triangle BEE = \triangle \Gamma HE$

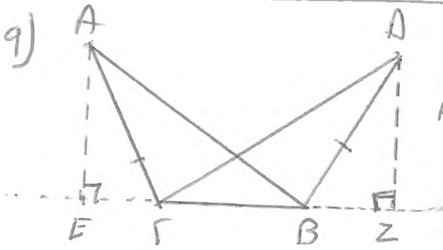
8)



Δ	Ζ
ΑΒ=ΑΓ	ΔΖ=ΕΗ
ΑΔ=ΔΒ μέσο	
ΑΕ=ΕΓ μέσο	
$\hat{Z}=\hat{H}=90°$ κάθετ.	

$\triangle \Delta BZ = \triangle EH\Gamma$ γιατί:
ΒΔ=ΕΓ (μισά ίσων πλευρών)
$\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (προς τη βάση γωνίες)
$\hat{Z}=\hat{H}=90$ (κάθετες)
} Ο-Π-Γ ⇒ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα άρα ΔΖ=ΕΗ

9)



Δ	Ζ
$\triangle AB\Gamma = \triangle \Delta B\Gamma$	ΑΕ=ΔΖ
$\hat{E}=\hat{Z}=90$ (κάθετες)	

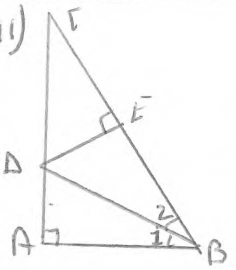
συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΒΖ.
ΑΓ=ΔΒ ($AB\Gamma=\Delta B\Gamma$)
$\hat{E}=\hat{Z}=90°$ (κάθετ.)
$\Delta\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ ($AB\Gamma=\Delta B\Gamma$) ⇒ $\Delta\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}E$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών)
} Ο-Π-Γ ⇒ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΑΕ=ΔΖ

10)

Δ	Ζ
ΑΔ=ΑΒ (μέσο)	$\triangle \Delta BZ = \triangle E\Gamma H$
ΑΕ=ΕΓ (μέσο)	
ΒΖ=ΓΗ	
ΑΒ=ΑΓ	

$\triangle \Delta BZ = \triangle E\Gamma H$ γιατί:
ΔΒ=ΕΓ (μισά ίσων πλευρών)
ΒΖ=ΓΗ (Δ)
$\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (προς τη βάση γωνίες)
} Π-Γ-Π ⇒ $\triangle \Delta BZ = \triangle E\Gamma H$

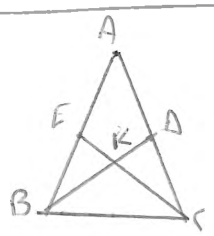
11)



Δ	Ζ
$\hat{A}=90$	ΑΒ=ΒΕ
$\hat{B}_1=\hat{B}_2$ διχ.	
$\hat{E}=90°$	

$\triangle \Delta EB = \triangle A\Delta B$ γιατί:
$\hat{B}_1=\hat{B}_2$ (διχοτόμος)
$\hat{E}=\hat{A}=90°$ (Δ)
ΒΔ κοινή
} Ο-Π-Γ ⇒ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΑΒ=ΒΕ

12)



Δ	Ζ
ΑΒ=ΑΓ	ΒΔ=ΓΕ
ΑΔ=ΔΓ, ΑΕ=ΕΒ } διάμεσοι	$\triangle KB\Gamma$ ισοσκελές

$\triangle BE\Gamma = \triangle B\Delta\Gamma$ γιατί:
$\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (προς τη βάση γ.)
ΒΕ=ΓΔ (μισά ίσων πλευρ.)
ΒΓ κοινή
} Π-Γ-Π ⇒ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΒΔ=ΓΕ αλλά και $B\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (1)

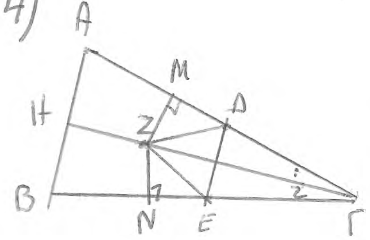
Αφού $B\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (1) ⇒ $\triangle KB\Gamma$ ισοσκελές γιατί έχει τις προς τη βάση γων. ίσες

13)

Δ	Ζ
ΒΜ=ΜΓ μέσο	ΑΜ=ΜΔ
ΑΓ∥ΒΔ	

$\triangle AM\Gamma = \triangle B\Delta M$ γιατί:
ΒΜ=ΜΓ (μέσο)
$\hat{\Gamma} = M\hat{B}\Delta$ (εντός εναλλάξ)
$\Gamma\hat{A}M = \hat{\Delta}$
$M_1=M_2$ (κατακορυφή)
} Γ-Π-Γ ⇒ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΑΜ=ΜΔ

14)



Δ	Ζ
ΓΔ = ΓΕ	$\hat{ZΔE}$ ισοσκελές
$\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ (διχοτ.)	ΜΖ = ΖΝ
$\hat{M} = \hat{N} = 90$ (αποστ.)	

$\overset{\triangle}{ZΔΓ} = \overset{\triangle}{ZEΓ}$ γιατί:
$\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ (διχοτ.)
ΓΔ = ΓΕ (Δ)
ΖΓ κοινή
$\xRightarrow{Π-Γ-Π}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. ΔΖ = ΖΕ

ΔΖ = ΖΕ άρα $\overset{\triangle}{ZΔE}$ ισοσκελές

$\overset{\triangle}{MΓZ} = \overset{\triangle}{NΓZ}$ γιατί:
$\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ (διχοτ.)
$\hat{M} = \hat{N}$ (αποστ.)
ΓΖ κοινή
$\xRightarrow{Ο-Π-Γ}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. ΖΜ = ΖΝ

---

15)

Δ	Ζ
ΑΒ = ΑΓ	$\overset{\triangle}{AΔE}$ ισοσκελές
ΑΔ = ΔΒ, ΑΕ = ΕΓ, ΔΜ = ΜΕ } μέσα	$\hat{BΔM} = \hat{MEΓ}$

ΑΔ = ΑΕ μισά ίσων πλευρών => $\overset{\triangle}{AΔE}$ ισοσκελές και $\hat{AΔM} = \hat{AEM}$ παρά τη βάση γ. ①

$\overset{\triangle}{BΔM} = \overset{\triangle}{MEΓ}$ γιατί:
ΔΒ = ΕΓ (μισά ίσων πλευρών)
ΔΜ = ΜΕ (—//—)
$\hat{BΔM} = \hat{ΓEM}$ παραπληρωματικές ίσων γωνιών ①
$\xRightarrow{Π-Γ-Π}$ είναι ίσα

---

16)

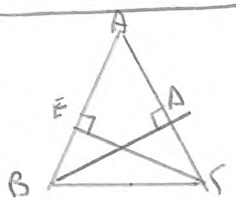
Δ	Ζ
ΟΒ = ΟΑ	ΒΕ = ΑΖ
$\hat{B} = \hat{A} = 90°$	

$\overset{\triangle}{OBZ} = \overset{\triangle}{OAE}$ γιατί:
$\hat{O}$ (κοινή γωνία)
ΟΒ = ΟΑ (Δ)
$\hat{B} = \hat{A} = 90°$ (Δ)
$\xRightarrow{Ο-Π-Γ}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. ΟΕ = ΟΖ

ΟΕ = ΟΖ
ΟΒ = ΟΑ
=> ΒΕ = ΑΖ από ίσα ευθ. τμήματα αφαιρώ ίσα ευθ. τμήματα

---

17)

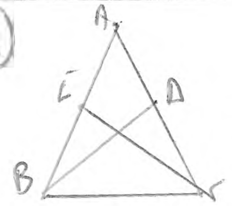


Δ	Ζ
ΑΒ = ΑΓ	ΒΔ = ΓΕ
$\hat{Δ} = \hat{E} = 90$ ύψη	

$\overset{\triangle}{EBΓ} = \overset{\triangle}{ΔBΓ}$ γιατί:
$\hat{E} = \hat{Δ} = 90°$ (ύψη)
ΒΓ κοινή
$\hat{B} = \hat{Γ}$ παρά τη βάση γ.
$\xRightarrow{Ο-Π-Γ}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχ. ίσα δηλ. ΒΔ = ΓΕ

---

18)

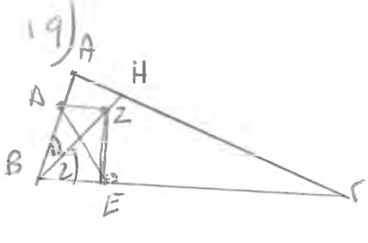


Δ	Ζ
ΑΒ = ΑΓ	ΓΕ = ΔΒ
ΑΕ = ΕΒ, ΑΔ = ΔΓ } διάμεσ.	

$\overset{\triangle}{BEΓ} = \overset{\triangle}{ΔBΓ}$ γιατί:
ΒΓ (κοινή)
$\hat{B} = \hat{Γ}$ (παρά τη βάση)
ΒΕ = ΔΓ (μισά ίσων πλευρών)
$\xRightarrow{Π-Γ-Π}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα άρα ΓΕ = ΔΒ

---

19)



Δ	Ζ
ΒΔ = ΒΕ	$\hat{BΔZ} = \hat{BEZ}$
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (διχ.)	$\overset{\triangle}{ΔEZ}$ ισοσκ.

$\overset{\triangle}{BΔZ} = \overset{\triangle}{BEZ}$ γιατί:
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (διχοτ.)
ΒΔ = ΒΕ (Δ)
ΒΖ (κοινή)
$\xRightarrow{Π-Γ-Π}$ είναι ίσα άρα ΔΖ = ΖΕ ①

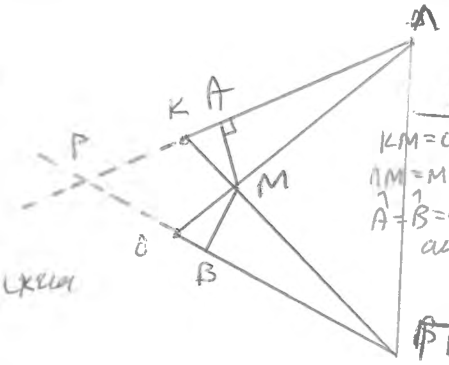
Αφού ΔΖ = ΖΕ => $\overset{\triangle}{ΔEZ}$ ισοσκελές παρά τη βάση γωνίες ίσες.

20) $\overset{\triangle}{K\Lambda M} = \overset{\triangle}{M\Pi O}$ γιατί:

$\left.\begin{array}{l} KM = OM \ (\Delta) \\ \Lambda M = M\Pi \ (\Delta) \\ M_1 = M_2 \ (\text{κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi}$ είναι ίσα άρα και $\hat{K} = \hat{O}$ (1)

$M\Lambda = M\Pi$ (2)

$A\hat{\Lambda}M = M\hat{\Pi}B$ (3)



Δ	Ζ
$KM = OM$	$\overset{\triangle}{K\Lambda M} = \overset{\triangle}{M\Pi O}$
$\Lambda M = M\Pi$	$AM = MB$
$\hat{A} = \hat{B} = 90°$ αποδ.	$\overset{\triangle}{P\Lambda\Pi}$ ισοσκ.

$\overset{\triangle}{KAM} = \overset{\triangle}{OBM}$ γιατί:

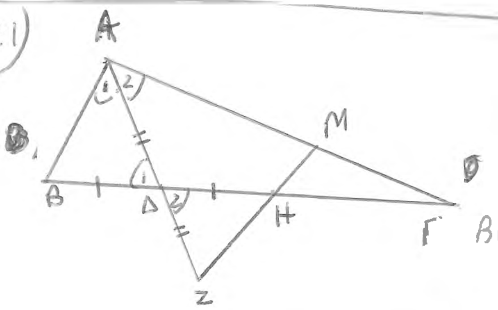
$\left.\begin{array}{l} KM = OM \ (\Delta) \\ \hat{A} = \hat{B} = 90 \ (\text{αποδ.}) \\ \hat{K} = \hat{O} \ (1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\Gamma-\Pi-\Gamma}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. $AM = MB$

(2) $M\Lambda = M\Pi \Rightarrow \overset{\triangle}{M\Lambda\Pi}$ ισοσκ. $\Rightarrow M\hat{\Lambda}\Pi = M\hat{\Pi}\Lambda$ } άθροισμα ίσων γωνιών

(3) $A\hat{\Lambda}M = M\hat{\Pi}B$ } $\Rightarrow P\hat{\Lambda}\Pi = P\hat{\Pi}\Lambda \Rightarrow \overset{\triangle}{P\Lambda\Pi}$ ισοσκελές γιατί έχει τις παρά τη βάση γων. ίσες

---

21)



Δ	Ζ
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ διχοτ.	$\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{\Delta ZH}$
$AZ = A\Delta$	$\overset{\triangle}{AMZ}$ ισοσκ.
$B\Delta = \Delta H$ μέσο	

$\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{\Delta ZH}$ γιατί:

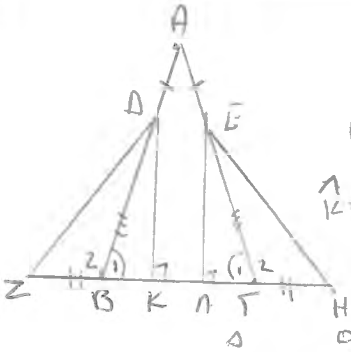
$\left.\begin{array}{l} A\Delta = \Delta Z \ (\Delta) \\ B\Delta = \Delta H \ (\text{μέσο}) \\ \Delta_1 = \Delta_2 \ (\text{κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi}$

έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. $\hat{A}_1 = \hat{Z}$

$\hat{A}_1 = \hat{Z}$ άρα $\overset{\triangle}{AMZ}$ ισοσκελές αφού έχει τις παρά τη βάση γωνίες ίσες

---

22)



Δ	Ζ
$AB = A\Gamma$	$\overset{\triangle}{\Delta BZ} = \overset{\triangle}{E\Gamma H}$
$BZ = \Gamma H$	$\Delta K = E\Lambda$
$A\Delta = AE$	
$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$ αποδείξ.	

$\overset{\triangle}{B\Delta Z} = \overset{\triangle}{E\Gamma H}$ γιατί:

$\Gamma H = ZB$ (Δ)

$E\Gamma = \Delta B$ (από ίσα απο τμ. (*) αφαιρ. ίσα απο τμ.)

$\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_2$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$)

} $\xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi}$ έχουν ίσα

$\overset{\triangle}{B\Delta K} = \overset{\triangle}{\Lambda\Gamma E}$ γιατί:

$\left.\begin{array}{l} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90° \ (\text{αποδ.}) \\ \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \ (\text{παρά τη βάση}) \\ E\Gamma = AB \ (*) \end{array}\right\} \xRightarrow{O-\Pi-\Gamma}$ έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα

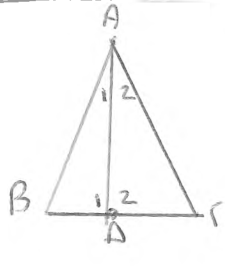
άρα $\Delta K = E\Lambda$

---

23) α) → Λ, β) → Λ γ) → Λ δ) → Λ ε) → Λ στ) → Λ

---

24)



Δ	Ζ
$AB = A\Gamma$	$A\Delta$ ύψος
$B\Delta = \Delta\Gamma$ διάμεσοι	$A\Delta$ διχοτ.

$\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ γιατί:

$\left.\begin{array}{l} AB = A\Gamma \ (\Delta) \\ B\Delta = \Delta\Gamma \ (\text{διάμεσοι}) \\ A\Delta \ \text{κοινή} \end{array}\right\} \xRightarrow{\Pi-\Pi-\Pi}$

έχουν όλα τους τα αντ. στοιχεία ίσα δηλ. $B = \Gamma$

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A\Delta$ διχοτόμος

$\left.\begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \\ \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90° \Rightarrow A\Delta$ ύψος

25) $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ γιατί

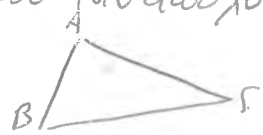
$A\Gamma = \Gamma\Delta$ (Δ)
$\Gamma E = \Gamma B$ (Δ)
$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν) αφού είναι ωροτίλαι

$\xrightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi}$ $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ άρα έχουν όλα τα αντ. στοιχεία ίσα. Έτσι $AB = \Delta E$

Άρα ο τοπογράφος είναι σωστός.
(Διάβασε στο σχολείο)

---

26) Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη διαφορά τους.



Δηλ $|A\Gamma - AB| < B\Gamma < A\Gamma + AB$
$|A\Gamma - B\Gamma| < AB < A\Gamma + B\Gamma$
$|B\Gamma - AB| < A\Gamma < B\Gamma + AB$

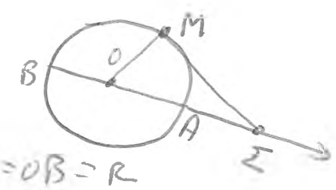
Περίληψη: Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα.

---

27) α) $7 = 4+3$ άρα δεν κατασκευάζεται
β) $12 < 9+11$ άρα κατασκευάζεται
γ) $6 > 3+2$ άρα δεν κατασκευάζεται
δ) $17 = 12+5$ άρα δεν κατασκευάζεται

---

28)



$OM = OA = OB = R$

i) $\Sigma A < \Sigma B$ προφανές, $\Sigma O > MO = R$
ii) Αν το M ταυτίζεται με το A $\Rightarrow \Sigma A = \Sigma M$
iii) Αν το M ταυτίζεται με το B $\Rightarrow \Sigma B = \Sigma M$
iv) Αν το M είναι σε οποιαδήποτε άλλη θέση τότε:

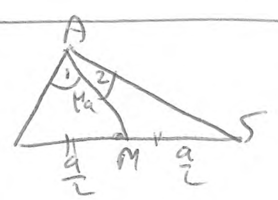
Από την ανισοτ. σχέση στο τρίγωνο ΣΜΟ έχουμε:

$\Sigma O - MO < \Sigma M < \Sigma O + MO \Rightarrow \Sigma O - AO < \Sigma M < \Sigma O + OB \Rightarrow \Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma A \le \Sigma M \le \Sigma B}$

---

29)



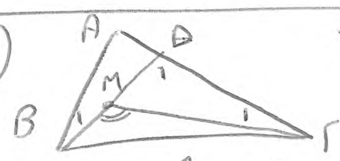
$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AMB} \\ \mu_a < \frac{a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} < \hat{A}_1$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AM\Gamma} \\ \mu_a < \frac{a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Gamma} < \hat{A}_2$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}_1 + \hat{A}_2$
$\Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$
ή $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$

---

30)



Έστω M τυχαίο σημείο μέσα στο τρίγωνο.
Προεκτείνω την BM προς το Δ

$\left.\begin{array}{l}\hat{M} \text{ εξωτερική γωνία του } \overset{\triangle}{M\Delta\Gamma} \Rightarrow \hat{M} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{M} > \hat{\Delta}_1 \\ \hat{\Delta}_1 \text{ εξωτερική γωνία του } \overset{\triangle}{A\Delta B} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{\Delta}_1 > \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{M} > \hat{\Delta}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{M} > \hat{A}$ ή $\hat{A} < \hat{M}$