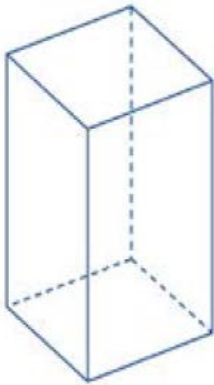


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: Πρίσμα – Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο – Κύβος

1. Κανονικό τετραγωνικό πρίσμα έχει πλευρά βάσης 6 cm και ύψος 10 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.



Α' τρόπος

Θεωρούμε το στερεό σαν ότι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $\alpha = 6$ cm, $\beta = 6$ cm και $\gamma = 10$ cm.

$$\text{Άρα } V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^3.$$

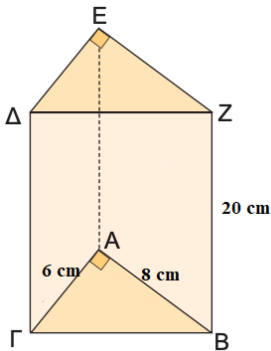
Β' τρόπος

Θεωρούμε ότι έχουμε ορθό πρίσμα με βάση τετράγωνο με

$$E_{\beta} = \alpha^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Άρα } V = E_{\beta} \cdot \upsilon = 36 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^3.$$

2. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 20 cm να βρείτε την παράπλευρη επιφάνεια και τον όγκο του.



Από το Π.Θ. η ΒΓ = 10 cm.

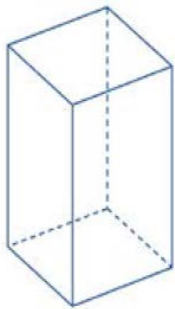
$$E_{\beta} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\Pi_{\beta} = 6 + 8 + 10 = 24 \text{ cm}$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon \Leftrightarrow E_{\pi} = 24 \cdot 20 = 480 \text{ cm}^2$$

$$V = E_{\beta} \cdot \upsilon = 24 \cdot 20 = 480 \text{ cm}^3$$

3. Τετραγωνικό πρίσμα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 80 cm² και ύψος 4 cm. Να βρείτε τον όγκο του.



Οι διαστάσεις του είναι $\alpha = \chi$ cm, $\beta = \chi$ cm και $\gamma = 4$ cm.
Ένας τρόπος για να δουλέψουμε είναι:

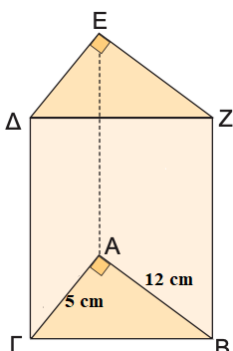
$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon \Leftrightarrow 80 = \Pi_{\beta} \cdot 4 \Leftrightarrow \Pi_{\beta} = 20 \text{ cm}$$

$$\Pi_{\beta} = 2\alpha + 2\beta \Leftrightarrow 20 = 2\chi + 2\chi \Leftrightarrow \chi = 5 \text{ cm} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5 \text{ cm και } \beta = 5 \text{ cm}$$

$$V = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow V = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100 \text{ cm}^3$$

4. Η βάση ενός ορθού τριγωνικού πρίσματος είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm. Αν $E_{\pi} = 270$ cm², να υπολογίσετε το ύψος και τον όγκο του.



Από το Π.Θ. η ΒΓ = 13 cm.

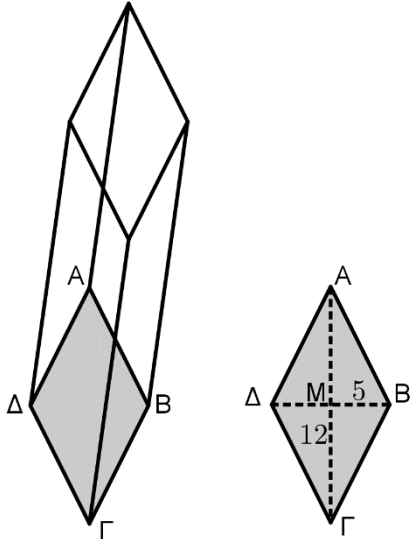
$$E_{\beta} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$\Pi_{\beta} = 5 + 12 + 13 = 30 \text{ cm}$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon \Leftrightarrow 270 = 30 \cdot \upsilon \Leftrightarrow \upsilon = 90 \text{ cm}$$

$$V = E_{\beta} \cdot \upsilon = 30 \cdot 90 = 2700 \text{ cm}^3$$

5. Ενός ορθού πρίσματος η βάση είναι ρόμβος με διαγώνιους 10 m και 24 m. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 15 m να υπολογίσετε το E_{π} , $E_{ολ}$ και τον όγκο V .



$$\delta_1 = 10 \text{ m}, \delta_2 = 24 \text{ m} \text{ και } \nu = 15 \text{ m}$$

$$\delta_1 = 10 \text{ m} \Leftrightarrow MB = 5 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 24 \text{ m} \Leftrightarrow M\Gamma = 12 \text{ m}$$

$$\text{Από το Π.Θ. η } B\Gamma = \alpha = 13 \text{ m}$$

$$E_{\beta} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ m}^2$$

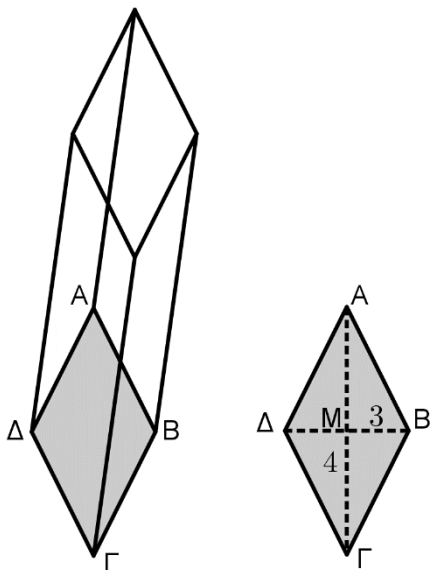
$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 13 = 52 \text{ m}$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \nu = 52 \cdot 15 = 780 \text{ m}^2$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 780 + 2 \cdot 120 = 1020 \text{ m}^2$$

$$V = E_{\beta} \cdot \nu = 120 \cdot 15 = 1800 \text{ m}^3$$

6. Η βάση ορθού πρίσματος είναι ρόμβος με διαγώνιους 6 m και 8 m. Αν το εμβαδόν ολικό του πρίσματος είναι 156 m². Να υπολογίσετε το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, το ύψος και τον όγκο του πρίσματος.



$$\delta_1 = 6 \text{ m}, \delta_2 = 8 \text{ m} \text{ και } E_{ολ} = 156 \text{ m}^2$$

$$\delta_1 = 6 \text{ m} \Leftrightarrow MB = 3 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 8 \text{ m} \Leftrightarrow M\Gamma = 4 \text{ m}$$

$$\text{Από το Π.Θ. η } B\Gamma = \alpha = 5 \text{ m}$$

$$E_{\beta} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ m}^2$$

$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m}$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} \Leftrightarrow 156 = E_{\pi} + 2 \cdot 24 \Leftrightarrow E_{\pi} = 108 \text{ m}^2$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \nu \Leftrightarrow 108 = 20 \cdot \nu \Leftrightarrow \nu = 5,4 \text{ m}^2$$

$$V = E_{\beta} \cdot \nu = 24 \cdot 5,4 = 129,6 \text{ m}^3$$

7. Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm²) χρειάζεται για να κατασκευαστεί το πρίσμα του διπλανού σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.

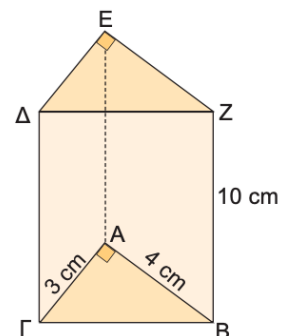
$$\text{Από το Π.Θ. η } B\Gamma = 5 \text{ cm.}$$

$$E_{\beta} = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

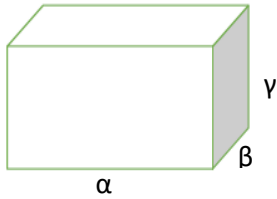
$$\Pi_{\beta} = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \nu \Leftrightarrow E_{\pi} = 12 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^2$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 120 + 2 \cdot 6 = 120 + 12 = 132 \text{ cm}^2$$



8. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 3 cm, πλάτος 4 cm και ύψος 5 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

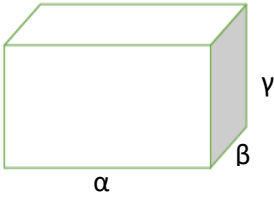


$$\alpha = 3 \text{ cm}, \beta = 4 \text{ cm} \text{ και } \gamma = 5 \text{ cm}$$

$$E_{ολ} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 24 + 30 + 40 = 94 \text{ cm}^2$$

$$V = \alpha\beta\gamma = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$

9. Να υπολογίσετε το πλάτος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο έχει $E_{ολ} = 52 \text{ cm}^2$, μήκος 2 cm και ύψος 4 cm.

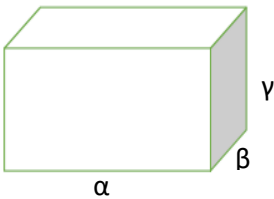


$$E_{ολ} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$52 = 2 \cdot 2 \cdot \beta + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot \beta \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$52 = 12\beta \Leftrightarrow \beta = 3 \text{ cm}$$

10. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ύψος 6 cm και μήκος τετραπλάσιο του πλάτους του. Αν έχει όγκο 600 cm^3 , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.



$$\alpha = 4\chi \text{ cm}, \beta = \chi \text{ cm} \text{ και } \gamma = 6 \text{ cm}$$

$$V = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow 600 = 4\chi \cdot \chi \cdot 6 \Leftrightarrow 600 = 24\chi^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 25 \Leftrightarrow \chi = 5 \text{ cm}$$

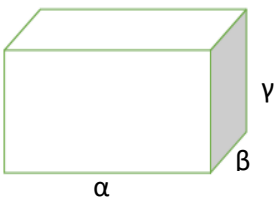
$$\alpha = 4\chi = 20 \text{ cm}$$

$$\beta = \chi = 5 \text{ cm}$$

$$E_{ολ} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$E_{ολ} = 2 \cdot 20 \cdot 5 + 2 \cdot 20 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 320 + 240 + 60 = 620 \text{ cm}^2$$

11. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 8 m, 9 m, 10 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του και τον όγκο του.

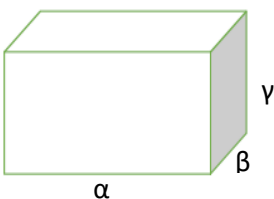


$$E_{ολ} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 2 \cdot 8 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$E_{ολ} = 144 + 160 + 180 = 464 \text{ cm}^2$$

$$V = \alpha\beta\gamma = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720 \text{ cm}^3$$

12. Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι εσωτερικές διαστάσεις της βάσης του είναι 85 cm και 60 cm και το ύψος του είναι 45 cm. Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερό θα χρειαστούν, για να γεμίσει το ενυδρείο κατά τα $\frac{8}{9}$ του.



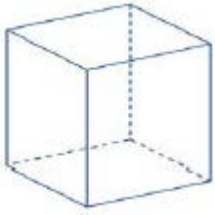
$$V = \alpha\beta\gamma = 85 \cdot 60 \cdot 45 = 229500 \text{ cm}^3$$

$$\text{Το κάθε λίτρο έχει } 1000 \text{ cm}^3$$

$$\text{άρα θα χρειαστούν } 229500 \div 1000 = 229,5 \text{ λίτρα για ολόκληρο}$$

$$\text{έτσι } \frac{8}{9} \cdot 229,5 = 204 \text{ λίτρα για τα } \frac{8}{9} \text{ του ενυδρείου.}$$

13. Δίνεται κύβος με ακμή βάσης 7 m. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.

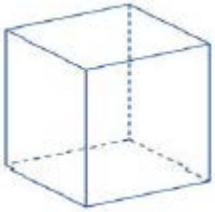


$$\alpha = 7 \text{ m Άρα}$$

$$E_{ολ} = 6\alpha^2 = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = \alpha^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$

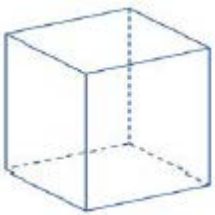
14. Να βρείτε τον όγκο του κύβου που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 54 cm².



$$E_{ολ} = 6\alpha^2 \Leftrightarrow 54 = 6 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

$$V = \alpha^3 = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$$

15. Κύβος έχει όγκο 125 cm³. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

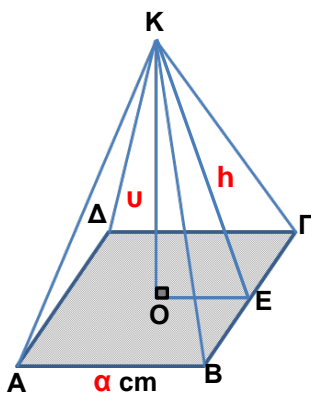


$$V = \alpha^3 \Leftrightarrow 125 = \alpha^3 \Leftrightarrow \alpha = 5 \text{ cm}$$

$$E_{ολ} = 6\alpha^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: Πυραμίδα

1. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 12 cm και απόστημα 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



$\alpha = 12 \text{ cm}$ άρα $OE = 6 \text{ cm}$ και $h = 10 \text{ cm}$. Από το Π.Θ. $u = 8 \text{ cm}$

$$E_{\beta} = \alpha^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

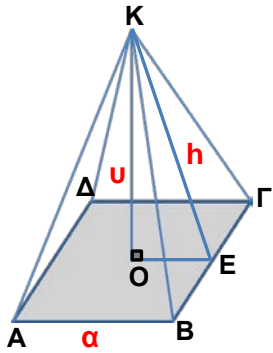
$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$$

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = \frac{48 \cdot 10}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = 240 + 144 = 384 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{144 \cdot 8}{3} = 384 \text{ cm}^3$$

2. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι 279 cm². Να υπολογίσετε το απόστημα της πυραμίδας.



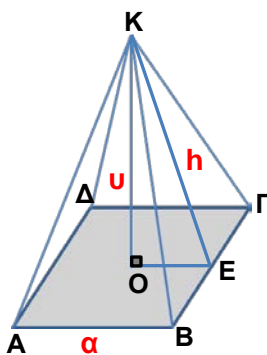
$$E_{\beta} = \alpha^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$$

$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} \Leftrightarrow 279 = E_{\pi} + 81 \Leftrightarrow E_{\pi} = 198 \text{ cm}^2$$

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \Leftrightarrow 198 = \frac{36 \cdot h}{2} \Leftrightarrow h = 11 \text{ cm}^2$$

3. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μίας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ισούται με 144 cm² και το παράπλευρο ύψος της είναι 8 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} \Leftrightarrow 279 = E_{\pi} + 81 \Leftrightarrow E_{\pi} = 198 \text{ cm}^2$$

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \Leftrightarrow 144 = \frac{\Pi_{\beta} \cdot 8}{2} \Leftrightarrow \Pi_{\beta} = 36 \text{ cm}$$

$$\Pi_{\beta} = 4\alpha \Leftrightarrow 36 = 4 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = 9 \text{ cm}$$

$$E_{\beta} = \alpha^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$$

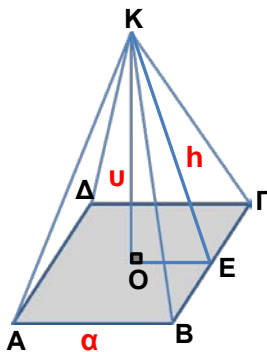
$$OE = \chi = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

Από το Π.Θ. $h^2 = v^2 + \chi^2$

$$8^2 = v^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow v^2 = 64 - \frac{81}{4} = \frac{175}{4} \Leftrightarrow v = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3} = \frac{81 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2}}{3} = \frac{135\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$$

4. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με περίμετρο 48 dm και ύψος 15 dm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

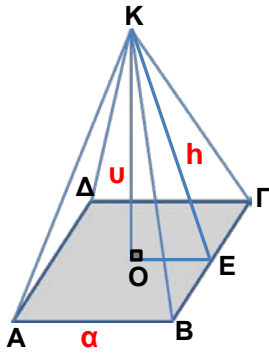


$$\Pi_{\beta} = 4\alpha \Leftrightarrow 48 = 4 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = 12 \text{ dm}$$

$$E_{\beta} = \alpha^2 = 12^2 = 144 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3} = \frac{144 \cdot 15}{3} = 720 \text{ dm}^3$$

5. Η διαγώνιος της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $5\sqrt{2}$ m. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι 12 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

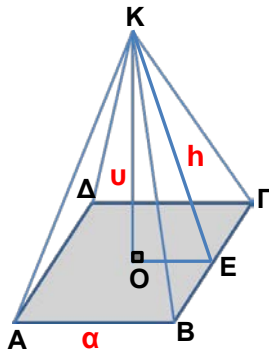


$$E_{\beta} = \alpha^2 = \frac{\delta^2}{2} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{2} = 25 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot \nu}{3} = \frac{25 \cdot 12}{3} = 100 \text{ m}^3$$

Μπορείτε να κάνετε και το Π.Θ. στο τρίγωνο ABΓ για να βρείτε το α.

6. Το εμβαδόν της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 81 cm. Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ της περιμέτρου της βάση της. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



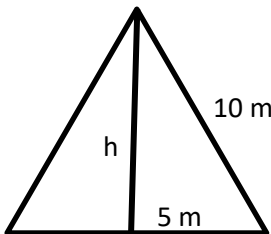
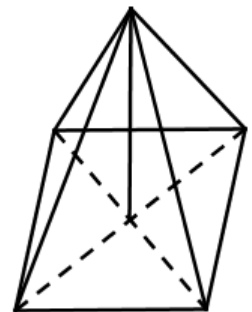
$$E_{\beta} = \alpha^2 \Leftrightarrow 81 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 9 \text{ cm}$$

$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}$$

$$\nu = \frac{1}{3} \Pi_{\beta} = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot \nu}{3} = \frac{81 \cdot 12}{3} = 324 \text{ cm}^3$$

7. Στο σχήμα φαίνεται η ξύλινη στέγη μιας κατοικίας που είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Η πλευρά της βάσης έχει μήκος 10 m και οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Η στέγη στηρίζεται από μια κεντρική δοκό, κάθετη στο κέντρο της βάσης. Οι παράπλευρες έδρες θα καλυφθούν με ειδικό υλικό που στοιχίζει €25 το τετραγωνικό μέτρο. Οι δοκοί για την κατασκευή του σκελετού της στέγης και της δοκού αντιστήριξης (όπως φαίνονται στο σχήμα με έντονες γραμμές) στοιχίζουν €15 το μέτρο. Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος κατασκευής της ξύλινης στέγης.



Η παράπλευρη έδρα είναι ισόπλευρο τρίγωνο έτσι από το Π.Θ.

$$10^2 = h^2 + 5^2 \Leftrightarrow h^2 = 100 - 25 \Leftrightarrow h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

από το Π.Θ.

$$h^2 = \nu^2 + \chi^2 \Leftrightarrow (5\sqrt{3})^2 = \nu^2 + 5^2 \Leftrightarrow \nu^2 = 75 - 25 \Leftrightarrow \nu = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ m}$$

Το κόστος για τους δοκούς είναι: $15(8\alpha + \nu) = 15(8 \cdot 10 + 5\sqrt{2}) = 1306,07$ ευρώ

$$\Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 10 = 40 \text{ m}$$

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = \frac{40 \cdot 5\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

Το κόστος για το υλικό είναι: $\frac{40 \cdot 5\sqrt{3}}{2} \cdot 25 = 4330,13$ ευρώ και το συνολικό κόστος θα είναι 5636,20 ευρώ.

