

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $4\chi - 12 =$

(β) $5\chi + 5\psi - 15 =$

(γ) $5\chi\psi^3 + 10\psi =$

(δ) $\psi^2 - 16 =$

(ε) $4\chi^2 - 16 =$

(στ) $\chi^3 + 1000 =$

(ζ) $\chi^2 - 6\chi + 8 =$

(η) $\chi^2 + 9\chi + 18 =$

(θ) $3\chi^2 - 27 =$

(ι) $\alpha\chi - \alpha\psi + 5\chi - 5\psi =$

(ια) $6\alpha(\chi - 2) + 4\alpha(2 - \chi) =$

(ιβ) $2\chi^2 - 16\chi + 30 =$

(ιγ) $\beta\chi - \beta + \omega\chi - \omega =$

(ιδ)

(ιε) $\psi^2 - 6\psi + 9 - \psi + 3 =$

$9\alpha\psi^2 + 3\alpha\psi - 6\psi\beta - 2\beta =$

(ιστ) $\gamma^3 + 27 - 3\gamma^2 - 9\gamma =$

(ιζ) $\chi\psi + 5\psi - \chi^2 - 2\chi + 15 =$

(ιη) $\omega^3 + \omega^2 - 36 =$

(ιθ) $(2\chi - 6)(\chi^2 - 1) - (4\chi - 12)(\chi - 1)^2 =$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3\chi^2 - 2\chi - 1 = 0$

(β) $4\chi^2 - 5\chi + 1 = 0$

(γ) $2\psi^2 + 7\psi - 4 = 0$

(δ) $3\chi^2 = 10\chi - 3$

(ε) $\chi(2\chi + 1) = 1$

(στ) $2\chi^2 = 9\chi$

(ζ) $\omega(5 - \omega) = 4$

(η) $15\chi^2 - 25\chi + 10 = 0$

(θ) $3\chi^2 - 2\chi - 1 = 0$

(ι) $3(\chi^2 - \chi) = (\chi - 1)(\chi + 1)$

(ια) $2\chi^3 + 3\chi^2 = 5\chi$

3. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση και ακολούθως να κάνετε όλες τις

δυνατές απλοποιήσεις $\left(\frac{4}{\chi^2 - 4} - \frac{2}{\chi^2 + 2\chi} - \frac{1}{2 - \chi}\right) \div \frac{\chi + 2}{\chi^3 - \chi^2 - 2\chi}$.

4. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

$$\frac{\psi^2 - 3\psi + 2}{\psi^2 - 1} \div \frac{5\psi - 10}{\psi^2 + \psi} =$$

$$\frac{\chi^2 - 5\chi}{\chi^2 - 7\chi + 10} \cdot \frac{\chi - 2}{\chi^2 + \chi} =$$

$$\left(\chi - \frac{5}{\chi - 4}\right) \div \frac{10 - 2\chi}{\chi^2 - 16} =$$

$$\frac{\chi + 3}{\chi - 3} - \frac{5}{\chi} + \frac{18}{3\chi - \chi^2} =$$

$$\frac{\psi^2 - 4}{\psi^2 + 4\psi + 4} \div \left(\frac{5}{\psi + 2} - \frac{3}{\psi}\right) =$$

$$\frac{2}{\chi^2 + 3\chi} - \frac{4}{\chi^2 - 9} - \frac{1}{3 - \chi} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} + \frac{1}{\chi^3}\right) \div \frac{\chi^4 - 1}{\chi^4 - \chi^3} =$$

$$\left(\frac{3}{\omega - 2} - \frac{1}{\omega + 2}\right) \div \frac{\omega^2 + 8\omega + 16}{\omega^3 - 4\omega} =$$

$$\frac{9\chi^2 - 12\chi + 4}{2\chi^2 - 6\chi} \div \left(\frac{\chi}{\chi^2 - 3\chi} - \frac{8 - \chi}{2\chi^2 - 18}\right) =$$

$$\frac{(\chi^3 + 2\chi^2) \cdot (\chi - 1)}{\chi^2 - 2\chi + 1} \div \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 - 3\chi + 2}$$

5. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\frac{\alpha^2}{2} - \frac{4}{\alpha}}{2\alpha^2 - 4\alpha} + 2\alpha = (\alpha + 2)^2$$

$$\frac{\alpha^2}{4\alpha^2}$$

$$\left(\frac{\chi}{\psi} - 2 + \frac{\psi}{\chi}\right) \div \left(\frac{\chi}{\chi\psi + \psi^2} - \frac{\psi}{\chi^2 + \chi\psi}\right) = \chi - \psi$$

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

$$\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} - 2\beta$$

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} = \alpha - \beta$$

$$\left(\frac{6\chi}{\chi^2 - 9} + \frac{2\chi}{\chi + 3}\right) \cdot \frac{\chi^2 + 6\chi + 9}{2\chi^2} = \frac{\chi + 3}{\chi - 3}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\frac{2\omega-1}{\omega+3} + \frac{\omega-4}{2-\omega} = \frac{35}{\omega^2 + \omega - 6}$$

$$\frac{\chi-7}{\chi^2-5\chi+4} - \frac{1}{4-\chi} = \frac{\chi-3}{\chi^2-\chi}$$

$$\frac{2}{\chi-3} + \frac{\chi}{2\chi-4} = \frac{2}{\chi^2-5\chi+6}$$

$$\frac{4\chi+4}{\chi^2+2\chi-15} - \frac{2}{\chi-3} = \frac{\chi+4}{\chi^2+5\chi}$$

$$\frac{7(\chi+1)}{\chi^2-\chi-12} + \frac{2\chi-3}{4-\chi} = \frac{1-3\chi}{\chi+3}$$

$$\frac{\chi+3}{\chi-3} + \frac{3}{3\chi-\chi^2} = \frac{1}{\chi}$$

7. α) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\chi + \frac{2\chi}{\chi-2}}{1 + \frac{4}{\chi^2-4}}$ και $B = \frac{\chi^3 - \chi^2 - \chi + 1}{2\chi^3 - 14\chi^2 - 16\chi}$.

Να δείξετε ότι $A = \chi + 2$ και να απλοποιήσετε την παράσταση B.

β) Αν $\chi + \frac{1}{\chi} = 5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\chi^3 + \frac{1}{\chi^3}$

8. α) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\chi^3 - \chi}{2\chi}$ και $B = \frac{\chi^2 - \chi - 2}{2\chi - 4}$, $\chi \neq 0$, $\chi \neq -1$, $\chi \neq 2$.

ι) Να δείξετε ότι $\frac{A}{B} = \chi - 1$. ιι) Να υπολογίσετε το $\left(\frac{A}{B}\right)^3$.

9. (α) Αν $f(\chi) = \chi^3 - \chi^2 + 12$

i. Να αποδείξετε ότι: $f(\chi - 3) = \chi^3 - 10\chi^2 + 33\chi - 24$

ii. Να αποδείξετε ότι το $\chi - 1$ είναι παράγοντας του $f(\chi - 3)$.

(β) Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 3$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$(\alpha + 3)(\beta + 3)$ και $\alpha^2 + \beta^2$.

10. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\chi-1}{\chi^2-5\chi+4}$ και $B = \frac{-2\chi^2-3\chi+5}{\chi^2-1}$.

(α) Να λύσετε τις εξισώσεις $\chi^2 - 5\chi + 4 = 0$ και $-2\chi^2 = 3\chi - 5$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του χ για να ορίζονται οι παραστάσεις A και B και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε.

(γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $K = 5B \div \frac{2\chi+5}{\chi+1} + 30A(\chi-4)$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{A}\right)^2 = K$.

11. Ο ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2\chi^2 + 7\chi - 15$ είναι το $2\chi - 3$. Να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

12. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το $2\psi + 4$ δίνει πηλίκο $\psi^2 - 3\psi + 5$ και αφήνει υπόλοιπο 3.

13. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $(\chi^2 + 7\chi + 12) : (\chi + 3)$ β) $(4\chi^2 - 12\chi + 9) : (2\chi - 3)$

γ) $\frac{\chi^2 - 6\chi + 8}{\chi - 2}$ δ) $(\chi^3 + 2\chi^2 - 13\chi - 3) : (\chi - 3)$

ε) $(3\chi^3 + \chi^2 - 4) : (\chi - 1)$

14. Αν $\chi - \frac{3}{\chi} = 4$, να δείξετε ότι: $\chi^3 - \frac{27}{\chi^3} = 100$

15. Αν $\varphi(\chi) = \chi^3 + 3\chi^2 - 5\chi + 10$, $\rho(\chi) = 3\chi - 2$ και $\sigma(\chi) = 3\chi^3 + 9\chi^2 - 10\chi + 6$,
 Να βρείτε τις παραστάσεις: $\rho(\chi) - \varphi(\chi)$, $6\rho(\chi)$, $\varphi(-3)$ και $\rho[\varphi(-3)]$.

Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma(\chi) - 3\varphi(\chi) = 6$.

16. (α) Δίνεται η παράσταση: $A = (2\chi - 3)^2 - (\chi - 1)(\chi + 1) + (\chi - 1)^3 - \chi^3$

i. Να αποδείξετε ότι: $A = 9(1 - \chi)$

ii. Αν $B = \chi^2 + \chi + 1$, να αποδείξετε ότι: $A \cdot B = 9 - 9\chi^3$

β) Να βρείτε τις τιμές του χ , για τις οποίες ορίζεται η πιο κάτω αλγεβρική παράσταση και να την απλοποιήσετε:

$$\frac{\chi^2 - 10\chi + 25}{\frac{\chi^3 - 5\chi^2}{\chi - \frac{25}{\chi}}} =$$

17. Δίνονται τα μονώνυμα $A = \frac{1}{4}\chi^6\psi^5$ και $B = -\frac{1}{2}\chi^4\psi^2$. Να βρείτε το πηλίκο $\frac{A}{B}$.

Αν το μονώνυμο $8\chi^{\mu-3}\psi^{2\lambda+1}$ είναι όμοιο με το πιο πάνω πηλίκο να βρείτε τις τιμές των μ και λ .

18. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$

$$(2\chi + 1)^3 - 2\chi(3\chi + 1) \cdot (3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$$

19. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

20. Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi$$

21. Αν $2\alpha - \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4\alpha^2 + \beta^2$.

22. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$

β) $\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$

γ) $(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6$

δ) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi$

ε) $16\chi^4 - 81\psi^4$

στ) $3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$

ζ) $\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2$

η) $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$

θ) $(\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi - 9)^2$

ι) $4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi)$

23. Χρησιμοποιώντας πλήρη παραγοντοποίηση σε γινόμενο ή με άλλο τρόπο να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $A = 2\chi^3 + 6\chi\psi^2 - 2\psi^3 - 6\chi^2\psi$ για $\chi=101$ και $\psi=99$.

24. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{\frac{\chi - 9\psi}{\psi} - \frac{\chi}{\chi}}{\frac{\chi^2 - 6\chi}{\psi^2} + 9} = \frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}} =$$