

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα με τη βοήθεια των ταυτοτήτων:

(α) $(\chi + 5)^2 =$

(β) $(\chi - 2)^2 =$

(γ) $(7 - 2\chi)^2 =$

(δ) $(4\alpha + \psi)^2 =$

(ε) $(\chi + 4)(\chi - 4) =$

(στ) $(3\chi - \psi)(3\chi + \psi) =$

(ζ) $(2\beta + 5)(5 - 2\beta) =$

(η) $(\chi + 2)^3 =$

(θ) $\left(\chi - \frac{\psi}{2}\right)\left(\chi + \frac{\psi}{2}\right) =$

(ι) $\left(\frac{2}{\chi} + \frac{\chi}{2}\right)^2 =$

(κ) $(\chi + 10)^2(\chi - 10)^2 =$

(λ) $(\sqrt{\beta} - 3)^3 =$

(μ) $(\chi^2 + 4)(\chi - 2)(\chi + 2) =$

(ν) $(-5 + 2\chi)^2 =$

(ξ) $\left(\frac{3}{5}\chi^3\psi^2 - 5\beta^3\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\chi^3\psi^2 + 5\beta^3\right)$

(ο) $(3\alpha - \beta) \cdot (9\alpha^2 + \beta^2) \cdot (3\alpha + \beta)$

(π) $(\chi - \sqrt{2})^2 =$

(ρ) $\left(\sqrt{\chi} + \frac{1}{\sqrt{\psi}}\right)^2 =$

2. Να γράψετε, τί ονομάζουμε ταυτότητα.

3. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

α) $0\chi = 0$

β) $\chi + \psi = 0$

γ) $\beta^2\beta = \beta^3$

δ) $(\chi + 3)^2 = \chi^2 + 6\chi + 9$

ε) $\chi\psi = 0$

στ) $2(\chi - 2) = 0$

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

(α) $(\chi - \psi)^2 = \chi^2 - 2\chi(-\psi) + (-\psi)^2$

(β) $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

(γ) $(5\psi + 4)^2 = 25\omega^2 + 16$

(δ) $(3\chi - \psi)^2 = 3\chi^2 - 2 \cdot 3\chi \cdot \psi + \psi^2$

(ε) $(\chi - \psi)^3 = \chi^3 - 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 - \psi^3$

(στ) $(\chi + 2)^3 = \chi^3 + 6\chi^2 + 12\chi + 8$

5. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(α) $(\alpha \dots)^2 = \dots + \dots + 9$

(β) $(\dots - 4)^2 = 2\psi^2 - \dots + \dots$

(γ) $(\beta^3 - \dots)(\dots + \dots) = \dots - \beta^8$

(δ) $(-\alpha - \dots)^2 = \dots + \frac{6\alpha}{\beta} + \dots$

6. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(\chi) = (\chi - 3)^2 + (3\chi + 1)^2 - 10(\chi - 1)(\chi + 1)$ είναι σταθερό.

7. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(\chi - 4)^2 + (2\chi + 5)^2 =$

(β) $(\chi^2 - 1)^2 - (\chi^2 - 3)(\chi^2 + 3) =$

(γ) $(\gamma^2 + \gamma)^3 - (\gamma^2 - \gamma)^3 =$

(δ) $(4\chi - 1)^3 - \chi(8\chi + 1)(8\chi - 1) =$

(ε) $(2\chi^2 + 2\chi)^2 + (2\chi + 1)^2 =$

8. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $(\chi - 2)(\chi + 2) + (\chi - 2)^2 + 2 = 2(\chi - 1)^2$

(β) $(\alpha + 1)^3 - (\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 - 4\alpha^2 = 4\alpha$

(γ) $(\omega - 2)^3 - \omega(\omega - 5)^2 + \omega + 17 = (2\omega - 3)^2$

(δ) $(\alpha - \beta)^3 - \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + 6\alpha\beta^2 = \beta(3\alpha^2 - \beta^2)$

(ε) $\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2} =$

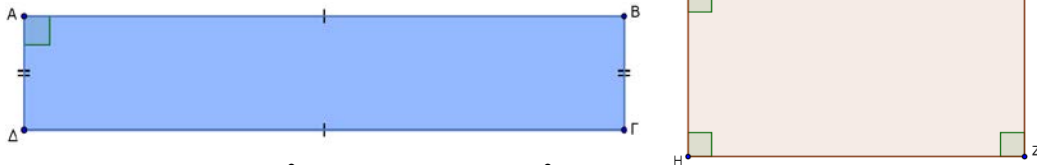
9. (α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $Z = \left(2020 + \frac{1}{404}\right)^2 - \left(2020 - \frac{1}{404}\right)^2$

10. Αν $\chi = 3 + \sqrt{5}$ και $\psi = 3 - \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\chi\psi$ (β) $\chi^2 - \psi^2$ (γ) $\chi^2 + \psi^2$ (δ) $\chi^3 + \psi^3$

11. Δίνονται τα πιο κάτω ορθογώνια:



α) Αν $AB = (4\chi + 3)^2 \text{ cm}$, $B\Gamma = (3\chi - 1)^2 \text{ cm}$, $H\text{Z} = (18\chi + 11) \text{ cm}$ και

$E\text{Z} = (5\chi - 1)(5\chi + 1) \text{ cm}$ να αποδείξετε ότι τα πιο πάνω σχήματα έχουν ίση περίμετρο.

β) Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι $\Pi(\chi) = (50\chi^2 + 36\chi + 20) \text{ cm}$

γ) Να βρείτε το χ , έτσι ώστε η περίμετρος να είναι ίση με 106 cm.

12. (α) Να αποδείξετε ότι $\beta^4 = 16 + (\beta^2 - 4)(\beta^2 + 4)$

(β) Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής, να υπολογίσετε τη ρίζα: $\sqrt{\sqrt{16 + 96 \cdot 104}}$

13. Δίνονται τα πολυώνυμα $A = \chi^3 + 4\chi^2 + 4\chi$, $B = \chi^2 - 4$ και $\Gamma = \chi^2 - 2\chi$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A = \chi(\chi + 2)^2$

(β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα Β και Γ.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{A} + \frac{2}{B} = \frac{1}{\Gamma}$

ΓΙΑ ΔΥΝΑΤΟΥΣ ΛΥΤΕΣ

14. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί χ και ψ για τους οποίους ισχύει $2^\chi = 12$ και $6^\psi = 12$

(α) να δείξετε ότι $\chi + \psi = \chi\psi$

(β) να υπολογίσετε την τιμή του κλάσματος $A = \frac{\frac{\chi + \psi}{\chi - \psi} - \frac{\chi - \psi}{\chi + \psi}}{\frac{1}{\chi - \psi}}$, όπου $\chi \neq \pm\psi$

(γ) να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $B = \left(\frac{\chi}{\psi} + \frac{\psi}{\chi} - 2\right) \div \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\chi}\right)$ και $\Gamma = \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi}\right) \cdot \chi\psi$

(δ) Αν $5B > A \cdot \Gamma$, να δείξετε ότι $\chi > 9\psi$

(ε) Αν επιπλέον $\chi + \psi = \chi\psi = 5$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(ι) $\frac{\chi}{\psi} + \frac{\psi}{\chi}$ και (ιι) $\frac{\chi}{\psi^2} + \frac{\psi}{\chi^2}$