ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Β΄ Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚ

Α΄ Γυμνασίου

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου, Β΄ Τεύχος

Συγγραφή:
Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ιωάννου Ιωάννης
Λοϊζιάς Σωτήρης
Ματθαίου Κυριάκος
Μαυροκορδάτου Μερόπη
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία:
Καλλεπίτη Ευτυχία, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης
Φιλίππου Ανδρέας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης
Γιασουμής Νικόλας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης
Παπαγιάννη Όλγα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης

Γλωσσική επιμέλεια:
Κατσουρά Ευφροσύνη, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012
Β΄ έκδοση 2014
Ανατύπωση 2015 (Με διορθώσεις)
Γ΄ έκδοση 2016

Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters

ISBN: 978-9963-54-012-9

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «... θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

08/01/2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ

5

Ακολουθίες

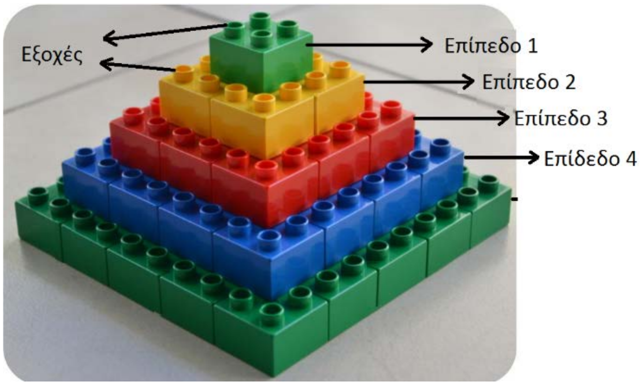
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε την ακολουθία.
- Να ορίζουμε τι είναι ο όρος μιας ακολουθίας.
- Να αναπαριστούμε τις ακολουθίες με διάφορους τρόπους.
- Να βρίσκουμε τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μια ακολουθία.
- Να περιγράφουμε λεκτικά τον κανόνα της ακολουθίας.
- Να εκφράζουμε το νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή.
- Να βρίσκουμε τους όρους της ακολουθίας όταν είναι γνωστός ο γενικός όρος.
- Να υπολογίζουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας.
- Να επιλύουμε και να κατασκευάζουμε αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα.

Ακολουθία

Εξερεύνηση

Τέσσερα παιδιά παρακολουθούν στην τηλεόραση ένα ντοκιμαντέρ για τους Μάγια, ένα λαό Ινδιάνων που είχε αναπτύξει τον λαμπρότερο πολιτισμό του Δυτικού Ημισφαιρίου. Ο λαός αυτός ασχολείτο με τη γεωργία, έκτιζαν πέτρινα σπίτια και πυραμιδοειδείς ναούς. Μερικές τέτοιες πυραμίδες διασώζονται μέχρι σήμερα στο Μεξικό.



Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την πυραμίδα των Μάγια με κύβους κατασκευών όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εσωτερικό της πυραμίδας είναι γεμάτο με κύβους. Κάθε κύβος έχει ύψος $3\ cm$ και φέρει στο πάνω μέρος του 4 εξοχές. Με βάση το διπλανό σχήμα να συζητήσετε κατά πόσο είναι δυνατό:

- Να υπολογίσουμε το ύψος της πυραμίδας.
- Να υπολογίσουμε τον αριθμό των κύβων για κάθε επόμενο επίπεδο.
- Να υπολογίσουμε τον αριθμό των εξοχών που φαίνονται σε κάθε επίπεδο.
- Να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς που θα έχει το κάθε πράσινο επίπεδο.

Μαθαίνω

Ακολουθία είναι μια **διατεταγμένη** λίστα αντικειμένων.
Π.χ. $2,5,8,11,14,17,20, \ldots$

Κάθε αντικείμενο στην ακολουθία ονομάζεται **όρος της ακολουθίας** και συνήθως συμβολίζεται με α_ν, όπου $\nu = 1,2,3,4, \ldots$.

Στις ακολουθίες υπάρχει μια **αντιστοιχία** των φυσικών αριθμών και του όρου της ακολουθίας, ο φυσικός αριθμός ν δηλώνει τη θέση του όρου στην ακολουθία.
Π.χ. Στην ακολουθία $2\,,5,8,11,14,17,20, \ldots$ ο πρώτος όρος είναι το 2, ο δεύτερος όρος είναι το 5, ο τρίτος όρος είναι το 8 κ.ο.κ. όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

Σε μια ακολουθία έχει σημασία η διάταξη των αντικειμένων της, (σε αντίθεση με τα σύνολα στα οποία δεν έχει σημασία η διάταξη).

Θέση (ν) στην ακολουθία α	$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$	$5^{ος}$	$6^{ος}$	$7^{ος}$
Συμβολισμός όρου α_ν	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
Όρος	2	5	8	11	14	17	20

Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσες φορές μπορεί να εμφανίζεται ένα αντικείμενο μιας ακολουθίας.
Π.χ. Στην ακολουθία $1,2,2,3,3,3, \ldots$ ο αριθμός 2 και ο αριθμός 3 εμφανίζονται περισσότερο από μια φορά ο καθένας.

Οι ακολουθίες βασίζονται σε κάποιο τύπο ή κανόνα. Για να καταγραφούν οι όροι μιας ακολουθίας, θα πρέπει να είναι γνωστός ο κανόνας ή ο τύπος.

Κάθε ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους.

(α) **Λεκτική** μορφή, περιγραφή της ακολουθίας.
Π.χ. Ο πρώτος όρος είναι 4 και κάθε επόμενος όρος αυξάνεται κατά 5.

(β) **Διατεταγμένη μορφή**, καταγραφή των όρων τις ακολουθίας.
Π.χ. $4,9,14,19, \ldots$

(γ) **Αναγωγικός τύπος,** ο όρος εκφράζεται συναρτήσει του προηγούμενου ή του επόμενου του όρου.
Π.χ. $\alpha_1 = 4, \qquad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 5 \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}$
$\alpha_1 = 4, \qquad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5 \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}$

(δ) **Γενικός τύπος** της μορφής α_ν. Το ν καθορίζει την θέση του όρου.
Π.χ. $\alpha_\nu = 5\nu + 4\,,\ \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}$

Παραδείγματα

---

1. Δίνεται η ακολουθία 3 , 7 , 11 , 15 , 19 ,23, … . Να βρείτε:
   (α) Τον τρίτο όρο
   (β) Τον όρο α_2

   Λύση:

   (α) Ο τρίτος όρος είναι το τρίτο αντικείμενο της ακολουθίας, δηλαδή $\alpha_3 = 11$.

   (β) Ο α_2 *είναι το τρίτο αντικείμενο της ακολουθίας, δηλαδή* $\alpha_2 = 7$.

2. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους για κάθε ακολουθία:
   (α) Ο πρώτος όρος είναι το 3 και κάθε επόμενος όρος πολλαπλασιάζεται με -2
   (β) $\alpha_\nu = 3\nu + 1$
   (γ) $\alpha_1 = 20$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$
   (δ) Τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών 1 μέχρι 5

   Λύση:

   (α)

πρώτος όρος	$+3$
δεύτερος όρος	$+3(-2) = -6$
τρίτος όρος	$-6(-2) = +12$
τέταρτος όρος	$+12(-2) = -24$
πέμπτος όρος	$-24(-2) = +48$

   Η ακολουθία είναι η $+3, -6, +12, -24, +48$.

   (β) $\alpha_\nu = 3\nu + 1$

   $1^{ος}$ *όρος* $\quad \nu = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 3(1) + 1 = 4$
   $2^{ος}$ *όρος* $\quad \nu = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 3(2) + 1 = 7$
   $3^{ος}$ *όρος* $\quad \nu = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 3(3) + 1 = 10$
   $4^{ος}$ *όρος* $\quad \nu = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 3(4) + 1 = 13$
   $5^{ος}$ *όρος* $\quad \nu = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 3(5) + 1 = 16$

   Η ακολουθία είναι η $4, 7, 10, 13, 16$.

   (γ) $\alpha_1 = 20$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$

   Για $\nu = 1 \quad \alpha_{1+1} = \alpha_1 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_2 = 20 - 3 = 17$
   Για $\nu = 2 \quad \alpha_{2+1} = \alpha_2 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_3 = 17 - 3 = 14$
   Για $\nu = 3 \quad \alpha_{3+1} = \alpha_3 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_4 = 14 - 3 = 11$
   Για $\nu = 4 \quad \alpha_{4+1} = \alpha_4 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_5 = 11 - 3 = 8$

   Η ακολουθία είναι η $20, 17, \ 14, \ 11, 8$.

   (δ) Τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών 1 μέχρι 5.
   $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, *άρα η ακολουθία είναι η* $1, 4, 9, 16, 25$.

3. Δίνεται ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 30\nu - 100$.
   (α) Να υπολογίσετε τον $5^{\text{ο}}$ και τον $200^{\text{ο}}$ όρο της ακολουθίας.
   (β) Ποιος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 200;

Λύση:

(α) Ο $5^{\text{ος}}$ όρος είναι $\alpha_5 = 30 \cdot 5 - 100 = 50.$

Ο $200^{\text{ος}}$ όρος είναι $\alpha_{200} = 30 \cdot 200 - 100 = 5900.$

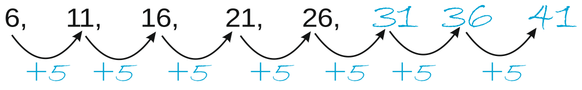
(β) $30\nu - 100 = 200 \implies 30\nu = 300 \Rightarrow \nu = 10$

Ο $10^{\text{ος}}$ όρος είναι ίσος με 200.

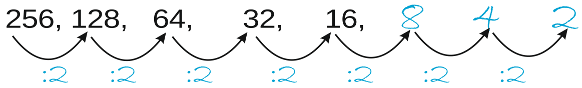
4. Να συμπληρώσετε τους 3 επόμενους όρους σε καθεμία από τις ακολουθίες:
   (α) $6, 11, 16, 21, 26, \ldots$
   (β) $256, 128, 64, 32, 16, \ldots$
   (γ) $3, 5, 8, 12,17, \ldots$
   (δ) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Λύση:

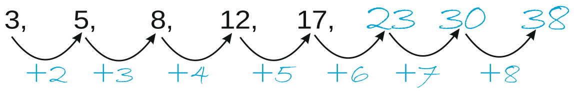
(α)



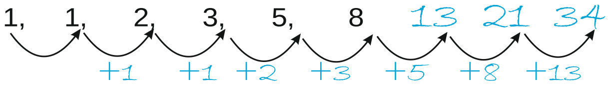
(β)



(γ)



(δ)



Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τουλάχιστον 5 διαφορετικές ακολουθίες, χρησιμοποιώντας το πιο κάτω ημερολόγιο:

ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ						
ΔΕΥΤΕΡΑ	**ΤΡΙΤΗ**	**ΤΕΤΑΡΤΗ**	**ΠΕΜΠΤΗ**	**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ**	**ΣΑΒΒΑΤΟ**	**ΚΥΡΙΑΚΗ**
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ακολουθίες:

(α) 4, 15, 26, 37, …, …, … , … ,

(β) 47, 42, 37, 32, …, …, … , … , …

(γ) 8, … , … , 14, … , … , 20, … , … , 26

(δ) 5,10,20,40, …, …, … , … , …

(ε) 120, 60, 30 15, …, …, … , … , …

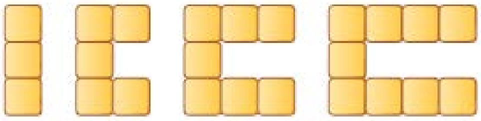
(στ) … , …, 7 , 7 , 7 , …

3. Να γράψετε την ακολουθία που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση αν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και την πράξη που εκτελείται σε κάθε επόμενο όρο της:

$1^{ος}$ όρος	Πράξη σε κάθε επόμενο όρο της	Ακολουθία (5 πρώτοι όροι)
2	Προσθέτω 4	
110	Αφαιρώ 8	
7	Τριπλασιάζω	
5	Διπλασιάζω και αυξάνω κατά 2	

4. Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους για κάθε ακολουθία με γενικό τύπο:
   (α) $\alpha_\nu = 5\nu$
   (β) $\alpha_\nu = \nu + 5$
   (γ) $\alpha_\nu = 10\nu - 3$
   (δ) $\beta_\nu = 20 - 3\nu$
   (ε) $\gamma_\nu = \frac{4}{\nu+3}$
   (στ) $\delta_\nu = \nu^2$
   (ζ) $\varepsilon_\nu = (-2)^\nu$
   (η) $\beta_\nu = (\nu - 1)^2$

5. Δίνεται η πιο κάτω ακολουθία σχημάτων.



   (α) Να βρείτε από πόσα τετράγωνα αποτελείται ο 5^{ος} όρος.
   (β) Να δώσετε την λεκτική μορφή της ακολουθίας που δείχνει τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε όρο της.

6. Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών που έχουν αναγωγικό τύπο:
   (α) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$
   (β) $\alpha_1 = 3$, $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$
   (γ) $\alpha_1 = -5$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$
   (δ) $\alpha_1 = 4$, $\alpha_{\nu+1} = \frac{2}{\alpha_\nu}$
   (ε) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$, $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$

7. Να υπολογίσετε τους τρεις επόμενους όρους σε κάθε ακολουθία:
   (α) $4, 44, 444, 4444, \ldots$
   (β) $1, 11, 121, 1331, 14641, \ldots$
   (γ) $1, 11, 121, 12321, 1234321, \ldots$
   (δ) $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5^2, \alpha_3 = 5^3$
   (ε) $1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, \ldots$

8. Για κάθε ακολουθία να βρείτε τον όρο που αναγράφεται:

(α) $\alpha_\nu = 4\nu$	$\alpha_{20} =$
(β) $\beta_\nu = \frac{2\nu}{3}$	$\beta_{60} =$
(γ) $\gamma_\nu = 5\nu + 3$	$\gamma_{2020} =$
(δ) $\delta_\nu = \nu^2 + 10\nu$	$\delta_8 =$

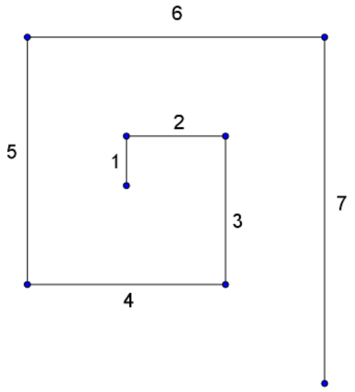
Γενικός Τύπος Ακολουθίας

Διερεύνηση (1)

Δίνονται οι πιο κάτω ακολουθίες:
$2,5,8,11,14, \dots$
$2,6,18,54,162, \dots$
$1,3,7,15,31,63, \dots$
$4,5,9,13,22,35,57, \dots$
$2,3,5,7,11,13,17, \dots$

Ένας φίλος σας κάθεται απέναντί σας και δεν βλέπει τα πιο πάνω μοτίβα. Να του περιγράψετε ένα «κανόνα» (**λεκτικά ή με τύπο**) ώστε να μπορέσει να σχηματίσει τα πιο πάνω μοτίβα.

Διερεύνηση (2)



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα πολύγωνο φτιαγμένο από μέταλλο. Να βρείτε πόσο θα είναι το μήκος του μετάλλου που θα χρειαστεί αν το πολύγωνο φτάσει στις 20 πλευρές:

Αριθμός Πλευρών ν	*Μήκος Πολυγώνου*	α_ν	*Γενική Μορφή*
1	1	1	$\frac{1 \cdot 2}{2}$
2	$1+2$	3	$\frac{2 \cdot 3}{2}$
3	$1+2+3$	6	$\frac{3 \cdot 4}{2}$
4			
5			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
ν			

Μαθαίνω

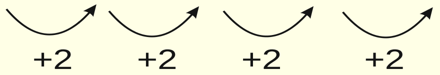
Σε κάθε ακολουθία μπορούμε να εντοπίσουμε ένα γενικό κανόνα για τον τρόπο που αναπτύσσεται. Σε πολλές περιπτώσεις (όχι πάντα) μπορούμε να εντοπίσουμε και τον γενικό τύπο α_ν της ακολουθίας.

Σε ακολουθίες όπου ένα μέρος κάθε όρου παραμένει σταθερό τότε αυτό το σταθερό μέρος θα εμφανίζεται και στον γενικό τύπο.
Αν ένα μέρος του όρου της ακολουθίας **αυξάνεται με ένα σταθερό αριθμό** ($\boldsymbol{\kappa}$) σε σχέση με τον προηγούμενό του, τότε ο γενικός όρος θα περιέχει το κομμάτι $\kappa \cdot \nu$.

Παράδειγμα

25, 49, 81, 121, 169

$5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2$



Κάθε όρος αυξάνεται κατά 2, δηλαδή ο γενικός τύπος θα περιέχει το 2ν.

$$\alpha_\nu = (2\nu + 3)^2$$

Μερικές βασικές ακολουθίες είναι οι πιο κάτω:

Η ακολουθία $1, 2, 3, 4, \ldots$ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία $0, 1, 2, 3, \ldots$ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \nu - 1, \quad \nu \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία που έχει όλους τους όρους ίσους με αριθμό κ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \kappa$
Π.χ. $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = 4$.

Ο τρόπος υπολογισμού του γενικού όρου, στις περιπτώσεις όπου μπορούμε να τον υπολογίσουμε, φαίνεται στα λυμένα παραδείγματα.

Στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να εντοπίσουμε τον γενικό όρο περιγράφουμε την ακολουθία λεκτικά
Π.χ. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$ η ακολουθία των πρώτων αριθμών.

Όταν μας δίνεται μια ακολουθία σε διατεταγμένη μορφή τότε μπορούμε να βρούμε περισσότερους από ένα γενικούς όρους.

Μια ακολουθία μπορεί να προκύπτει από συνδυασμό ακολουθιών.
Π.χ. $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{6}{45}, \frac{8}{135}, \ldots$
Οι αριθμητές αποτελούν την ακολουθία $2, 4, 6, 8, \ldots$, άρα 2ν.
Οι παρονομαστές αποτελούν την ακολουθία $5, 15, 45, 135, \ldots$, άρα $5 \cdot 3^{\nu-1}$.
Δηλαδή η ακολουθία έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \frac{(2\nu)}{5 \cdot 3^{\nu-1}}$.

Παραδείγματα

1. Να βρείτε ένα γενικό όρο $\alpha_\nu\,, \nu\epsilon\mathbb{N}$ που εκφράζει τις πιο κάτω ακολουθίες:

   (α) $3, 7, 11, 15, \dots$

   (β) $22, 16, 10, 4, \dots$

   (γ) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

   (δ) $2, 6, 18, 54, 108, \dots$

   (ε) $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots$

   (στ) $\frac{2\cdot2}{5}, \frac{2\cdot4}{7}, \frac{2\cdot8}{9}, \frac{2\cdot16}{11}, \dots$

Λύση:

(α) $1^{ος}$ Τρόπος

3, 7, 11, 15, 19

+4 +4 +4 +4

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυξάνεται με σταθερή διαφορά 4. Άρα, δοκιμάζω 4ν.

$\alpha_\nu = 4\cdot\nu + \cdots$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Για } \nu = 1 \rightarrow \alpha_1 = 3 = 4\cdot1 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 2 \rightarrow \alpha_2 = 7 = 4\cdot2 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 3 \rightarrow \alpha_3 = 11 = 4\cdot3 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 4 \rightarrow \alpha_4 = 15 = 4\cdot4 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 5 \rightarrow \alpha_5 = 19 = 4\cdot5 + \boxed{-1}
\end{aligned}\right\} \alpha_\nu = 4\nu - 1$$

$2^{ος}$ τρόπος

3, 7, 11, 15, 19

+4 +4 +4 +4

Σε κάθε επόμενο όρο προσθέτουμε 4.

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	3	3	$3 + 4\cdot0$
$\alpha_2 =$	7	$3+4$	$3 + 4\cdot1$
$\alpha_3 =$	11	$3+4+4$	$3 + 4\cdot2$
$\alpha_4 =$	15	$3+4+4+4$	$3 + 4\cdot3$
$\alpha_5 =$	19	$3+4+4+4+4$	$3 + 4\cdot4$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\alpha_\nu =$			$3 + 4\cdot(\nu - 1)$

(β) $1^{ος}$ *Τρόπος*

22, 16, 10, 4,

-6 -6 -6

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος μειώνεται κατά 6 άρα δοκιμάζω 6ν.

$$\alpha_\nu = -6\nu + \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \nu = 1 \rightarrow \alpha_1 = 22 = -6\cdot 1 + \boxed{28} \\ \text{Για } \nu = 2 \rightarrow \alpha_2 = 16 = -6\cdot 2 + \boxed{28} \\ \text{Για } \nu = 3 \rightarrow \alpha_3 = 10 = -6\cdot 3 + \boxed{28} \end{array}\right\} \alpha_\nu = -6\nu + 28$$

$2^{ος}$ *τρόπος*

22, 16, 10, 4,

-6 -6 -6

Για κάθε επόμενο όρο αφαιρούμε 6.

Όρος	Ακολουθία	Ανάπτυγμα	Γενική μορφή
$\alpha_1 =$	22	22	$22 - 6\cdot 0$
$\alpha_2 =$	16	$22 - 6$	$22 - 6\cdot 1$
$\alpha_3 =$	10	$22 - 6 - 6$	$22 - 6\cdot 2$
$\alpha_4 =$	4	$22 - 6 - 6 - 6$	$22 - 6\cdot 3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$22 - 6\cdot(\nu - 1)$

(γ) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

3, 6, 12, 24, 48

x 2 x 2 x 2 x 2

Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος πολλαπλασιάζεται με 2.

Όρος	Ακολουθία	Ανάπτυγμα	Γενική μορφή
$\alpha_1 =$	3	3	$3\cdot 2^0$
$\alpha_2 =$	6	$3\cdot 2$	$3\cdot 2^1$
$\alpha_3 =$	12	$3\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^2$
$\alpha_4 =$	24	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^3$
$\alpha_5 =$	48	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^4$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$3\cdot 2^{\nu-1}$

(δ)
$$\begin{tikzcd} 1, \arrow[r, bend right] & 8, \arrow[r, bend right] & 27, \arrow[r, bend right] & 81, \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη ακολουθία ούτε αυξάνεται με σταθερή διαφορά αλλά ούτε πολλαπλασιάζεται με σταθερό αριθμό.
Σε αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να γράψουμε τον κάθε όρο της ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο.

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 81, \quad \dots$$

$$1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad 4^3 \quad \dots$$

Οι βάσεις αποτελούν την ακολουθία 1,2,3,4 *και οι εκθέτες είναι σταθεροί και ίσοι με* 3 *άρα* $\alpha_\nu = \nu^3$.

(ε)
$$\begin{tikzcd} 54, \arrow[r, bend right, "\div 3"'] & 18, \arrow[r, bend right, "\div 3"'] & 6, \arrow[r, bend right, "\div 3"'] & 2, \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος διαιρείται με το 3 *σε σχέση με τον προηγούμενο του.*

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	54	54	$\frac{54}{3^0}$
$\alpha_2 =$	18	$\frac{54}{3}$	$\frac{54}{3^1}$
$\alpha_3 =$	6	$\frac{54}{3\cdot 3}$	$\frac{54}{3^2}$
$\alpha_4 =$	2	$\frac{54}{3\cdot 3\cdot 3}$	$\frac{54}{3^3}$
…	…	…	…
$\alpha_\nu =$			$\frac{54}{3^{\nu-1}}$

(στ) $\frac{2\cdot2}{5}, \frac{2\cdot4}{7}, \frac{2\cdot8}{9}, \frac{2\cdot16}{11}, \dots$

Ο αριθμητής προκύπτει από την ακολουθία $4, 8, 16, 32, \dots$ *με γενικό όρο* $2\cdot 2^\nu$ *και ο παρονομαστής από την ακολουθία* $5, 7, 9, 11, \dots$ *με γενικό όρο* $(2\nu+3)$.

Έτσι ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = \frac{2\cdot 2^\nu}{2\nu+3}$.

Δραστηριότητες

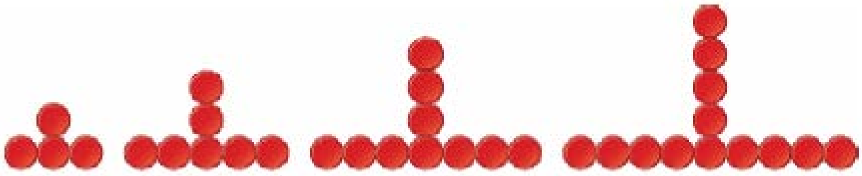
1. Να βρείτε πόσο πρέπει να προσθέτουμε κάθε φορά ώστε να δημιουργήσουμε την ακολουθία:
   (α) Των άρτιων αριθμών
   (β) Των περιττών αριθμών
   (γ) Των πολλαπλασίων του 9
   (δ) Των ακέραιων αριθμών που λήγουν σε 8

2. Να βρείτε ένα γενικό τύπο για κάθε μια από τις πιο κάτω ακολουθίες:
   (α) Οι φυσικοί αριθμοί που αρχίζουν από το 100 και αυξάνονται κατά 4.
   (β) Οι περιττοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 10.
   (γ) Τα πολλαπλάσια του 3 που είναι μεγαλύτερα από το 20.
   (δ) Τα τετράγωνα των αριθμών που είναι πιο μεγάλοι από το 5.

3. Να βρείτε ένα γενικό τύπο για κάθε μια από τις πιο κάτω ακολουθίες:
   (α) $2, 6, 10, 14, 18, \dots$
   (β) $2, 6, 18, 54, 162, \dots$
   (γ) $-7, -9, -11, -13, -15, \dots$
   (δ) $10, 10, 10, 10, \dots$
   (ε) $\frac{3}{5}, \frac{6}{8}, \frac{12}{11}, \frac{24}{14}, \dots$
   (ζ) $60, 57, 54, 51, \dots$
   (η) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$

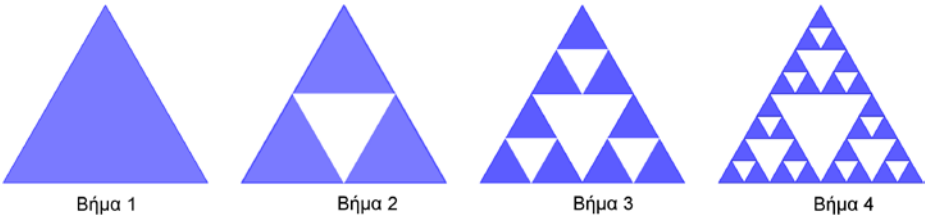
4. Ποιος από τους πιο κάτω τύπους περιγράφει καλύτερα τον γενικό όρο της ακολουθίας $30, 40, 50, 60, 70, \dots$;
   (α) $\alpha_\nu = 30$
   (β) $\alpha_\nu = 30\nu + 10$
   (γ) $\alpha_\nu = 10\nu + 30$
   (δ) $\alpha_\nu = 80 - 10\nu$
   (ε) $\alpha_\nu = 20 + 10\nu$

5. Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας που δίνει τον αριθμό των κύκλων για κάθε σχήμα:



Να εξετάσετε κατά πόσο θα υπάρχει σχήμα στην πιο πάνω ακολουθία που να έχει κατασκευαστεί με ακριβώς 200 κύκλους.

6. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια ακολουθία φτιαγμένη από τρίγωνα.



Το πρώτο τρίγωνο έχει εμβαδόν $1m^2$.

(α) Να γράψετε την ακολουθία που να δείχνει τον αριθμό των μπλε τριγώνων για κάθε βήμα.

(β) Να γράψετε τον αναγωγικό τύπο της ακολουθίας που δείχνει τον αριθμό των άσπρων τριγώνων για κάθε βήμα (ανεξαρτήτως μεγέθους).

(γ) Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας που δείχνει το εμβαδόν της μπλε σκιασμένης περιοχής για κάθε βήμα.

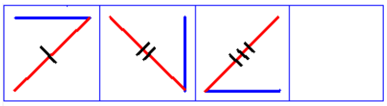
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Για κάθε ακολουθία να βρείτε τους τρεις επόμενους όρους:
   - (α) $17, 12, 7, 2, \ldots$
   - (β) $-1, 2, -4, 8, \ldots$
   - (γ) $-5, -1, 3, 7, \ldots$
   - (δ) $10000, 1000, 100, 10, \ldots$
   - (ε) $3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$
   - (στ) $1,2,6,24,120, \ldots$

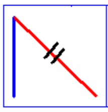
2. Να βρείτε ένα γενικό όρο της κάθε ακολουθίας και στην συνέχεια τον $30^{\text{ο}}$ όρο της κάθε ακολουθίας:
   - (α) $7, 9, 11, 13, 15 \ \ldots$
   - (β) $2, -4, 8, -16, 32 \ \ldots$
   - (γ) $50, 45, 40, 35, 30 \ \ldots$
   - (δ) $\frac{4}{15}, \frac{19}{11}, \frac{34}{7}, \frac{49}{3}, \ldots$
   - (ε) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

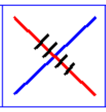
3. Ο Αβραάμ θέλει να αγοράσει το ποδήλατο της φωτογραφίας που αξίζει €193. Στα γενέθλια του που ήταν τον Γενάρη μάζεψε €50, στην συνέχεια εξοικονομούσε €13 τον μήνα. Ποιο μήνα θα έχει αρκετά λεφτά για να αγοράσει το ποδήλατο;

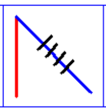
4. Δίνεται η ακολουθία σχημάτων

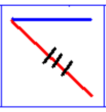


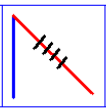
Ποιο από τα πιο κάτω πρέπει να μπει στο κενό τετραγωνάκι;

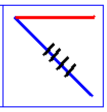

Α


Β

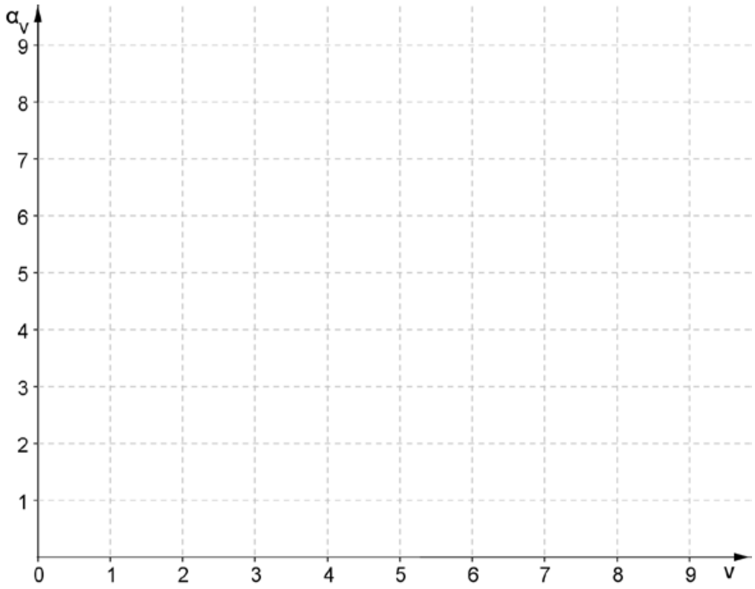

Γ


Δ

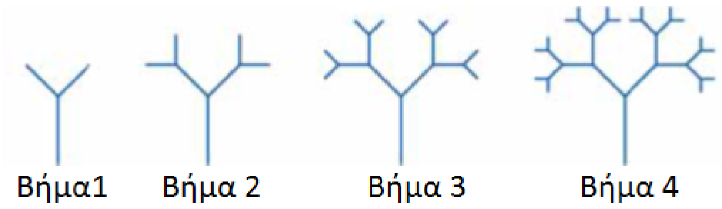

Ε


Ζ

5. Να παραστήσετε γραφικά στο πιο κάτω σύστημα αξόνων τους πρώτους όρους τις κάθε ακολουθίας:
   (α) $\alpha_\nu = 2\nu$
   (β) $\alpha_\nu = \nu + 2$



6. Για να κατασκευάσεις αυτό το δέντρο φράκταλ παίρνεις ένα ευθύγραμμο τμήμα (κορμός) και προσθέτεις στο ένα άκρο του δύο άλλα μικρότερα τμήματα (κλαδιά) όπως φαίνεται στο πρώτο βήμα. Στην συνέχεια κάθε κλαδί γίνεται κορμός και προσθέτουμε νέα κλαδιά.



   (α) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει τον αριθμό των κλαδιών για κάθε βήμα.
   (β) Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας.
   (γ) Να βρείτε πόσα κλαδιά θα έχει το δέντρο στο $40^{\text{ο}}$ βήμα.

7. Να γράψετε πέντε ακολουθίες που έχουν πρώτο όρο τον αριθμό 3 και δεύτερο όρο τον αριθμό 6.

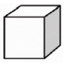
8. Το κάθε καροτσάκι μιας υπεραγοράς έχει μήκος $1\,m$. Όταν αποθηκεύονται το ένα πίσω από το άλλο δημιουργούν μια αλυσίδα η οποία αυξάνεται κατά $20\,cm$ για κάθε νέο καροτσάκι.

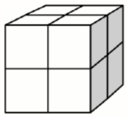
   (α) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει το μήκος της αλυσίδας για κάθε ένα από τα πρώτα 6 καροτσάκια.
   (β) Να γράψετε τον γενικό τύπο της ακολουθίας αυτής.
   (γ) Αν η υπεραγορά διαθέτει μόνο ένα διάδρομο αποθήκευσης καροτσιών, μήκους $8\,m$, όπως φαίνεται στην φωτογραφία, ποιος θα είναι ο μέγιστος αριθμός από καροτσάκια που μπορούν να τοποθετηθούν στον διάδρομο.

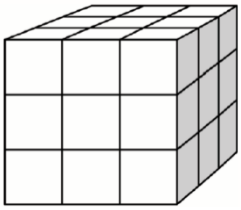
9. Ένα ξενοδοχείο χρεώνει €50 την πρώτη ημέρα διαμονής και €30 για κάθε επόμενη μέρα.

   (α) Να βοηθήσετε τον ξενοδόχο να κατασκευάσει ένα κατάλογο στον οποίο να φαίνεται το κόστος διαμονής από 1 μέχρι 7 μέρες.
   (β) Να γράψετε τον γενικό τύπο της πιο πάνω ακολουθίας.
   (γ) Να βρείτε πόσα θα πληρώσει ένας πελάτης που έμεινε στο ξενοδοχείο ολόκληρο τον Αύγουστο.
   (δ) Αν ένας πελάτης διαθέτει €500, πόσες είναι οι περισσότερες μέρες που μπορεί να διαμένει στο ξενοδοχείο;

10. Ο Ζήνων κάνει κατασκευές με μικρούς κύβους τους οποίους κολλάει μεταξύ τους και δημιουργεί μεγαλύτερους κύβους. Στην συνέχεια βάφει την εξωτερική επιφάνεια της κάθε κατασκευής.







    Να βρείτε ένα γενικό τύπο που να περιγράφει για κάθε κατασκευή:
    (α) Τον αριθμό των μικρών κύβων που χρειάζεται.
    (β) Τον αριθμό των μικρών τετραγώνων που έχουν βαφτεί.
    (γ) Τον αριθμό των μικρών κύβων που θα έχουν μπογιά πάνω τους.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Μια μπάλα που πέφτει από κάποιο ύψος κτυπά στο έδαφος και ανεβαίνει στο $40\,\%$ του προηγούμενου ύψους της. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αναπήδηση.
   (α) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει το ύψος στο οποίο ανεβαίνει η μπάλα για τις πρώτες 3 αναπηδήσεις που θα κάνει αν πέσει από ύψος $40\ m$.
   (β) Να βρείτε ποια θα είναι η τελευταία αναπήδηση στην οποία η μπάλα θα ανέβει πάνω από $1\ m$.

2. Δίνεται η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 2\nu$ και η ακολουθία με γενικό τύπο $\beta_\nu = \nu + 1$.
   (α) Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους κάθε ακολουθίας.
   (β) Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας
   $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots$.

3. Να βρείτε τον γενικό όρο των ακολουθιών:
   (α) $2, 5, 10, 17, 26\ \dots$
   (β) $1, 3, 6, 10, 15\ \dots$
   (γ) $0, 6, 24, 78, 240, \dots$
   (δ) $-1\,, +4, -9, +16, -25, \dots$

4. Σε ένα πάρτι ο κάθε καλεσμένος θα ανταλλάξει μια μόνο χειραψία με κάθε άλλο καλεσμένο.
   (α) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει των αριθμό των χειραψιών που θα γίνουν αν οι καλεσμένοι είναι από 1 μέχρι 6.
   (β) Να γράψετε ένα γενικό τύπο για την ακολουθία.
   (γ) Πόσες χειραψίες θα γίνουν αν υπάρχουν 15 καλεσμένοι;

5. Ο Παναγιώτης εργάζεται σε μια πιτσαρία και αμείβεται €400 τον μήνα και €$0{,}80$ για κάθε πίτσα που παραδίδει. Ο Σταύρος αμείβεται €391 τον μήνα και €$1{,}10$ για κάθε πίτσα που ετοιμάζει. Να γράψετε μια ακολουθία για το εισόδημα κάθε ενός. Ένα μήνα παρατήρησαν ότι το εισόδημα τους ήταν το ίδιο. Να βρείτε ποιος ήταν ο ελάχιστος πιθανός αριθμός από πίτσες που ετοίμασε ο Σταύρος.

6. Να βρείτε το ν −οστό όρο των ακολουθιών:
   - (α) $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$
   - (β) $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 4\alpha_\nu$

7. Να βρείτε τον α_{200} στην ακολουθία με $\alpha_{50} = 210$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$.

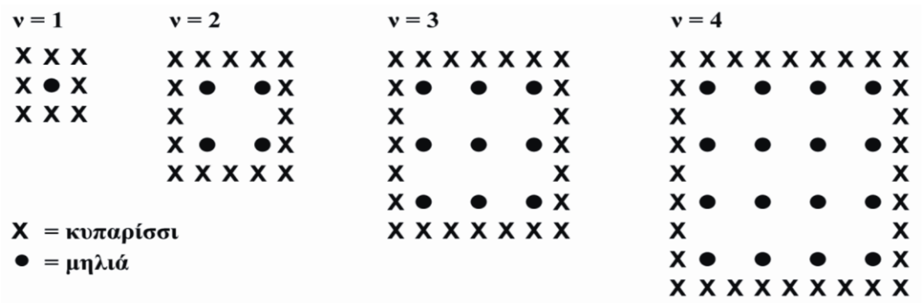
8. Δίνονται οι γενικοί τύποι $\alpha_\nu = \nu + 3$ και $\beta_\nu = \nu^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ δύο ακολουθιών.

   Να βρείτε με την βοήθεια των πιο πάνω:
   - (α) Τον γενικό τύπο της ακολουθίας που προκύπτει από το άθροισμα των δύο ακολουθιών.
   - (β) Το ανάπτυγμα της ακολουθίας με γενικό τύπο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$.
   - (γ) Τον γενικό τύπο της ακολουθίας $4, 20, 54, 112, \ldots$.

9. ΜΗΛΙΕΣ

Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντας τις με κυπαρίσσια.

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε την διάταξη των δέντρων όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές.
(ν = σειρές από μηλιές)



Ερώτηση 1: ΜΗΛΙΕΣ

Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

Ερώτηση 2: ΜΗΛΙΕΣ

Οι τύποι που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών στα παρακάτω διαγράμματα είναι δύο:
Πλήθος δέντρων μηλιάς = λ^2
Πλήθος κυπαρισσιών= 8λ
όπου ν είναι ο αριθμός των σειρών που σχηματίζουν οι μηλιές.

Υπάρχει μία τιμή του ν, για την οποία το πλήθος των δέντρων μηλιάς ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε την τιμή αυτή του ν και να περιγράψετε παρακάτω τον τρόπο, με τον οποίο την υπολογίσατε.

Ερώτηση 3: ΜΗΛΙΕΣ

Ας υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του, προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Ενώ ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια; Γράψτε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντηση σας.

Σημείωση 1. Από *Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών - PISA* (σελ. 205-206), από Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2007, Αθήνα: Επτάλοφος Α.Β.Ε.Ε.
Σημείωση 2. Θέμα που δόθηκε στους μαθητές/τριες για το Πρόγραμμα PISA 2000 (κυρίως έρευνα).

ΕΝΟΤΗΤΑ

6

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε βασικές γεωμετρικές έννοιες και να κατασκευάζουμε γεωμετρικά σχήματα, με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.
- Να διερευνούμε σχέσεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων.
- Να ορίζουμε την απόσταση δύο σημείων και να βρίσκουμε το μέσο ευθύγραμμου τμήματος.
- Να αναγνωρίζουμε και να κατασκευάζουμε κάθετες και παράλληλες ευθείες, καθώς και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος.
- Να υπολογίζουμε την απόσταση σημείου από ευθεία.
- Να ορίζουμε, να κατασκευάζουμε, και να συγκρίνουμε γωνιές.
- Να κατασκευάζουμε τη διχοτόμο γωνιών και να εξετάζουμε σχέσεις γωνιών.
- Να ορίζουμε και να κατασκευάζουμε τον κύκλο και τα στοιχεία του.
- Να διερευνούμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.
- Να χρησιμοποιούμε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούμε σχέσεις με επαγωγικό συλλογισμό, να διερευνούμε υποθέσεις και να δίνουμε αντιπαραδείγματα.

Μέτρηση Μήκους

Έχουμε Μάθει...

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

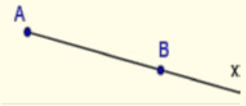
- Το **σημείο** δεν έχει διαστάσεις και καθορίζει μια θέση.
  Σημειώνεται με τελεία και συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Διαβάζεται ως σημείο Α.

- Η **ευθεία** είναι ένα σύνολο από σημεία, με άπειρο μήκος, χωρίς αρχή ή τέλος και χωρίς πλάτος και κατασκευάζεται με χάρακα.
  Η **ευθεία** συμβολίζεται:
  - με ένα μικρό γράμμα του αλφαβήτου π.χ. (ε)
  - με δύο μικρά γράμματα π.χ. x΄x
  - με δύο σημεία π.χ. ΑΒ ή ΒΑ

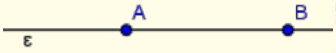
  Διαβάζεται ως ευθεία ΑΒ ή ευθεία *ε* ή ευθεία *x΄x*

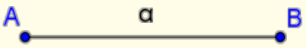
- **Ημιευθεία** είναι ένα μέρος της ευθείας που έχει συγκεκριμένη αρχή, αλλά δεν έχει τέλος.
  Η **ημιευθεία** συμβολίζεται με το σημείο που είναι η αρχή και
  - ένα άλλο σημείο πάνω σε αυτή π.χ. Β
  - ένα γράμμα που καθορίζει τη φορά π.χ. x

  Διαβάζεται ως Ημιευθεία ΑΒ ή Ημιευθεία *Ax*.

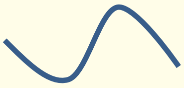


- **Ευθύγραμμο τμήμα** είναι ένα μέρος της ευθείας. Αποτελείται από δύο σημεία της ευθείας (άκρα) και όλα τα σημεία μεταξύ τους.
  Συμβολίζεται με τα δύο άκρα του π.χ. ΑΒ ή ΒΑ ή με ένα μικρό γράμμα π.χ. α
  Διαβάζεται ως ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ή ΒΑ ή ως ευθύγραμμο τμήμα α.

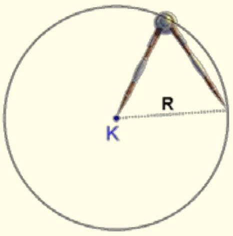




- **Καμπύλη** είναι μια γραμμή, της οποίας κανένα τμήμα δεν είναι ευθύγραμμο.

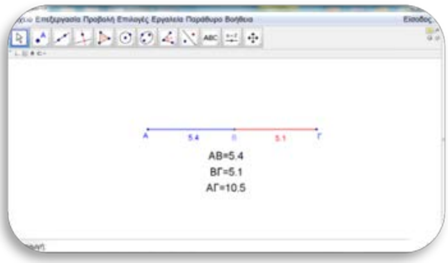


- **Κύκλος** είναι το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο.
  - Η σταθερή απόσταση ονομάζεται ακτίνα και συμβολίζεται με το γράμμα *R* ή *ρ*.
  - Το σταθερό σημείο Κ ονομάζεται Κέντρο του κύκλου.
  - Τόξο ονομάζεται ένα μέρος του κύκλου.



Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_MetrisiMikous.ggb»*.



AB=5.4
ΒΓ=5.1
ΑΓ=10.5

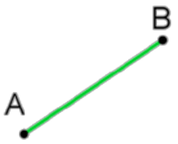
- ✓ Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$ και ένα σημείο του $Β$.
- ✓ Να μετακινήσετε το σημείο $Β$ σε διάφορες θέσεις και να καταγράψετε για την κάθε θέση του $Β$ τις μετρήσεις σας στον διπλανό πίνακα.
- ✓ Να βρείτε μια σχέση που συνδέει τα μήκη $ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ$.

$ΑΒ$	$ΒΓ$	$ΑΓ$	$ΑΒ + ΒΓ$

Μαθαίνω

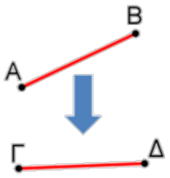
- **Απόσταση** δύο σημείων $Α$ και $Β$ ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΒ$ που τα ενώνει.

  Το **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος θα το συμβολίζουμε ως $(\boldsymbol{ΑΒ})$ ή ως **μήκος** $\boldsymbol{ΑΒ}$ ή ως $\boldsymbol{ΑΒ}$.



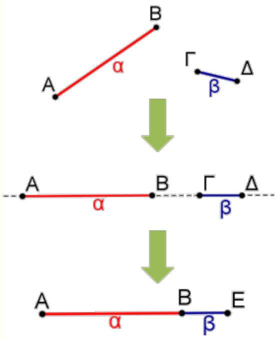
- **Ίσα ευθύγραμμα τμήματα** είναι αυτά που έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος.
  Αν τοποθετηθεί το $ΑΒ$ πάνω στο $ΓΔ$, τότε κάθε σημείο του $ΑΒ$ συμπίπτει με κάθε σημείο του $ΓΔ$.

$$ΑΒ = ΓΔ$$



- Για να **προσθέσουμε** ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μία ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.

Παράδειγμα:
Αν $ΑΒ = α$ *και* $ΓΔ = β$, *τότε το άθροισμά τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα* $ΑΕ = α + β$.



- **Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος** είναι το σημείο του τμήματος που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

Παράδειγμα:
Μ είναι το μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow ΑΜ = ΜΒ$

$$ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2}$$

$ΑΜ = ΜΒ$

Παραδείγματα

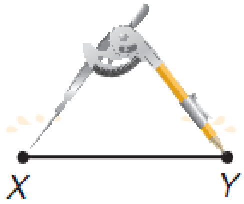
1. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα PT ίσο με ευθύγραμμο τμήμα XY.

Λύση:

Βήμα 1:

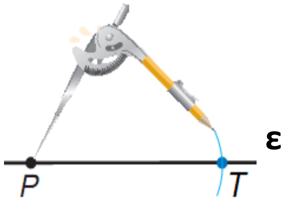
Πάνω σε ευθεία ε παίρνουμε τυχαίο σημείο P.

Βήμα 2:



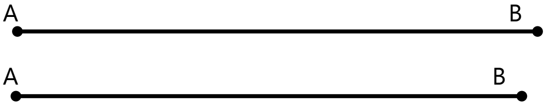
Ανοίγουμε τον διαβήτη ώστε τα άκρα του να συμπέσουν με τα σημεία X και Y.

Βήμα 3:



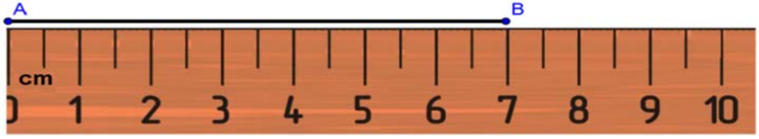
Διατηρώντας το άνοιγμα του διαβήτη ίσο με το XY, γράφουμε τόξο με κέντρο το P, το οποίο τέμνει την ευθεία ε στο σημείο T.
Άρα, $PT = XY$.

2. Να τοποθετήσετε με ακρίβεια τα σημεία E και M στα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων στις πιο κάτω περιπτώσεις.



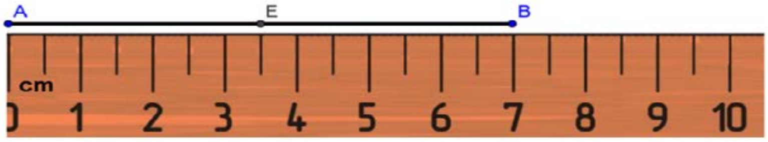
Λύση:

Τοποθετώ τον χάρακα στο τμήμα AB όπως φαίνεται στο σχήμα.



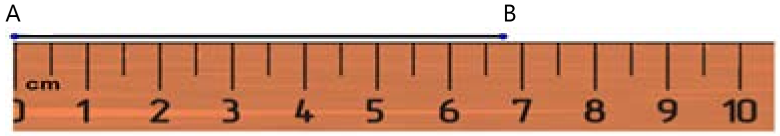
Μετρώ το μήκος του τμήματος $AB = 7\ cm$.

Τα σημεία A, E και B που βρίσκονται πάνω στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα και κατ΄ επέκταση στην ίδια ευθεία, ονομάζονται **συνευθειακά**.



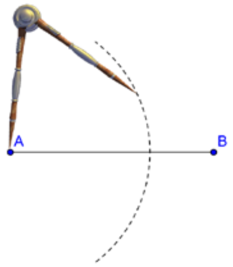
Βρίσκω το μισό του AB, δηλαδή $7 : 2 = 3{,}5\ cm$.
Το AE θα έχει μήκος $3{,}5\ cm$ και το σημείο E θα είναι το μέσο του AB.

Τοποθετώ τον χάρακα στο τμήμα AB όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να μετρήσουμε με ακρίβεια το μήκος του AB, άρα ούτε να βρούμε το μέσο του AB.



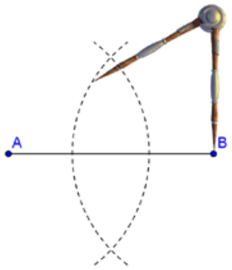
Έτσι, κατασκευάζουμε το μέσο M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

<u>Βήμα 1:</u>



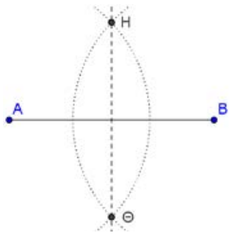
Ανοίγουμε τον διαβήτη περισσότερο από το μισό μήκος του AB. Με κέντρο το άκρο A γράφουμε τόξο.

<u>Βήμα 2:</u>



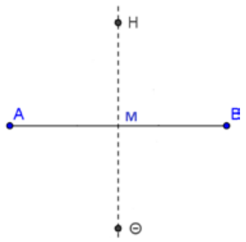
Διατηρώντας το ίδιο άνοιγμα του διαβήτη και με κέντρο το άκρο B, γράφουμε νέο τόξο.

<u>Βήμα 3:</u>



Φέρουμε ευθεία που περνά από τα σημεία τομής H και Θ των δύο τόξων.

<u>Βήμα 4:</u>



Το σημείο τομής M της ευθείας $H\Theta$ και του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το μέσο του AB.

Δραστηριότητες

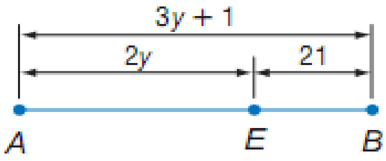
1. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB με μονάδα μέτρησης το ευθύγραμμο τμήμα α. Να χρησιμοποιήσετε μόνο τον διαβήτη σας.

2. Το σημείο A απέχει $10\,cm$ από το σημείο B. Σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις να τοποθετήσετε το σημείο Γ στην κατάλληλη θέση, έτσι ώστε να ισχύουν τα πιο κάτω και στη συνέχεια να υπολογίσετε το μήκος ΓA.
   (α) Το Γ είναι μέσο του AB.
   (β) Το A είναι μέσο του $B\Gamma$.
   (γ) Το Β είναι μέσο του ΑΓ.
   (δ) Το Δ είναι μέσο του ΑΒ και το Γ μέσο του ΔΒ.

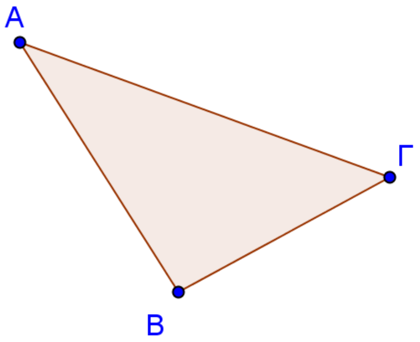
3. Να υπολογίσετε την τιμή του x και το μήκος του AB. Το σημείο M είναι το μέσο του AB, το $AM = (5x - 10)\,cm$ και το $BM = (3x - 2)\,cm$.

4. Ένα σχοινί μήκους $36\,m$ κόπηκε σε τρία κομμάτια, το πρώτο κομμάτι είναι το μισό του δεύτερου, ενώ το τρίτο είναι κατά $1\,m$ μεγαλύτερο από το διπλάσιο του δεύτερου. Να βρείτε το μήκος του μεγαλύτερου κομματιού.

5. Να υπολογίσετε την τιμή του y και το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων AE και AB, αν $AE = 2y$, $EB = 21$ και $AB = 3y + 1$.



6. Στο πιο κάτω σχήμα να προεκτείνετε τις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ, ώστε $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$. Να συγκρίνετε τα μήκη AB και ΔE.

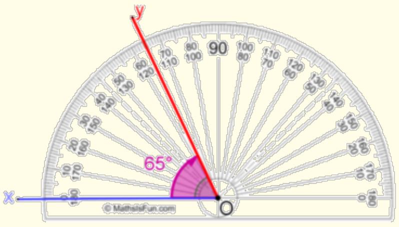


7. *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra για την πιο κάτω κατασκευή:*
   - (α) Να κατασκευάσετε τρία σημεία A, B, Γ στο επίπεδο, ώστε να μη βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
   - (β) Να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, A\Gamma$.
   - (γ) Να κατασκευάσετε το μέσο M του AB.
   - (δ) Να κατασκευάσετε το μέσο N του $A\Gamma$.
   - (ε) Να υπολογίσετε το μήκος των $B\Gamma$ και MN.
   - (στ) Να μετακινήσετε το σημείο B.
   - (ζ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μήκη $B\Gamma$ και MN;

Γωνία

Έχουμε μάθει…

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο** (γεωμετρικό όργανο).

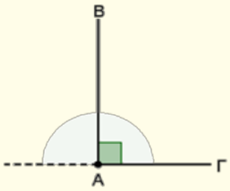


Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο** γωνίας.

Η **μονάδα μέτρησης γωνίας** είναι η **μοίρα** και συμβολίζεται με °. Η μοίρα αντιστοιχεί στο τόξο που είναι ίσο με $\frac{1}{360}$ του κύκλου και υποδιαιρείται σε 60 λεπτά $(60')$ και κάθε λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα $(60'')$.

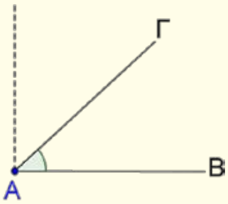
➢ Ταξινόμηση γωνιών

- **Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία που έχει μέτρο **90°**.



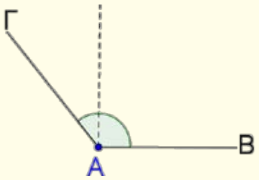
$B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

- **Οξεία γωνία** λέγεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη από 0° και μικρότερη των 90°.



$0^\circ < B\hat{A}\Gamma < 90^\circ$

- **Αμβλεία γωνία** λέγεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη των 90°και μικρότερη των 180°.



$90^\circ < B\hat{A}\Gamma < 180^\circ$

Εξερεύνηση

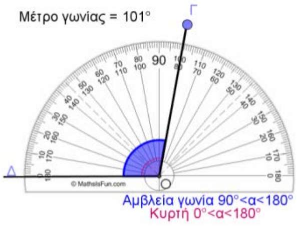
Ο διπλανός «τροχός», ο οποίος βρίσκεται σε ένα πάρκο ψυχαγωγίας στην Αγία Νάπα, έχει 32 βαγόνια και το ύψος του είναι 50 μέτρα. Ο τροχός περιστρέφεται δεξιόστροφα. Να βρείτε πόσο πρέπει να περιστραφεί ο τροχός ώστε το βαγόνι που βρίσκεται στη θέση A να φτάσει στη θέση B.

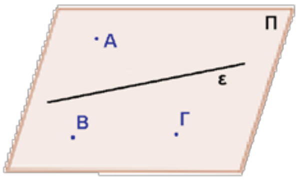
Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En5_Eidos_Gonias.ggb».

Να μετακινήσετε το σημείο $Γ$ σε διάφορες θέσεις.

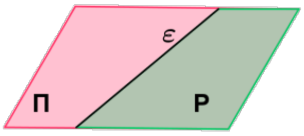
Να εντοπίσετε τα διάφορα είδη γωνιών.





Μαθαίνω

- **Επίπεδο** είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.
  Συμβολίζεται με τρία σημεία ή ένα κεφαλαίο γράμμα.
  Διαβάζεται «επίπεδο Π» ή «επίπεδο ΑΒΓ».
  - *Ένα επίπεδο εκτείνεται απεριόριστα.*
  - *Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο.*
  - *Από μια ευθεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.*

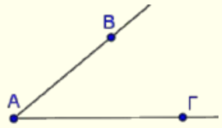


- Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο **ημιεπίπεδα.**

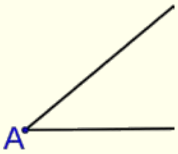
- Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές. Καθεμιά από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται **γωνία**.

  Η κοινή αρχή K των ημιευθειών ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Kx και Kx' ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας.

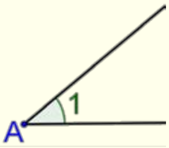
Ο τρόπος συμβολισμού των γωνιών φαίνεται πιο κάτω:



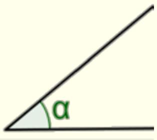
∡ΒΑΓ ή ∡ΓΑΒ
$\widehat{ΒΑΓ}$ ή $\widehat{ΓΑΒ}$
γωνία ΒΑΓ



∡Α
$\widehat{Α}$
γωνία Α



∡ $Α_1$
$\widehat{Α_1}$
γωνία $Α_1$

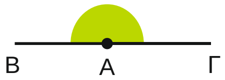


∡α
$\widehat{α}$
γωνία α

- **Μηδενική** είναι η γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν και το μέτρο της είναι ίσο με 0^{o}**.**

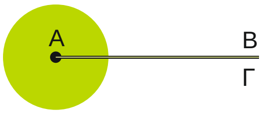
$\boldsymbol{\widehat{ΒΑΓ} = 0^{o}}$

- **Ευθεία γωνία** είναι η γωνία που έχει μέτρο ίσο με 180°.



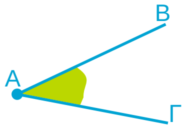
$B\hat{A}\Gamma = 180^{\circ}$

- **Πλήρης γωνία** είναι η γωνία που έχει μέτρο ίσο με $\mathbf{360^{\circ}}$**.**



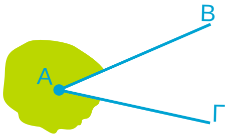
$B\hat{A}\Gamma = 360^{\circ}$

- **Κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι μικρότερη των 180°.



$0^{o} < B\hat{A}\Gamma < 180^{o}$

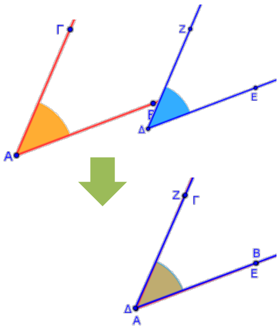
- **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που έχει μέτρο μεγαλύτερο των 180°και μικρότερο των 360°.

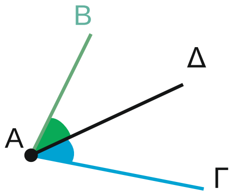


$180^{o} < \widehat{ΒΑΓ} < 360^{o}$

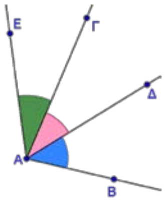
- **Ίσες γωνίες** είναι οι γωνίες που ταυτίζονται, όταν μετατοπιστούν κατάλληλα.
  - *Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες και αντίστροφα.*

Παράδειγμα:
Οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΔΖ είναι ίσες, $B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z$





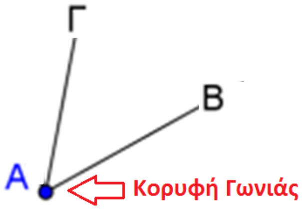
- **Εφεξής γωνίες** είναι δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.
  Παράδειγμα:
  Οι $\Gamma\hat{A}\Delta$ *και* $\Delta\hat{A}B$ *είναι εφεξής γωνίες αφού* A *είναι κοινή κορυφή, η* $A\Delta$ *είναι η κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.*



- **Διαδοχικές γωνίες** ονομάζονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της.
  Παράδειγμα:
  Οι γωνίες $E\hat{A}\Gamma$*,* $\Gamma\hat{A}\Delta$ *και* $\Delta\hat{A}B$ *είναι διαδοχικές γωνίες.*

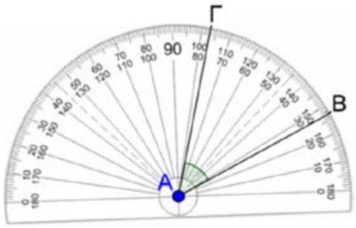
Παραδείγματα

1. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΓAB με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου.

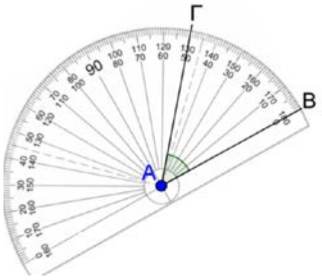


Λύση:

<u>Βήμα 1:</u> Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμονίου στην κορυφή A *της γωνίας.*

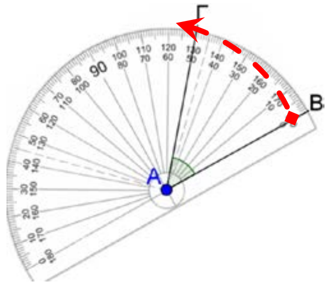


<u>Βήμα 2:</u> Περιστρέφουμε το μοιρογνωμόνιο και τοποθετούμε την ένδειξη 0 στη μια πλευρά AB *της γωνίας.*



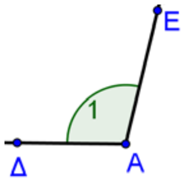
<u>Βήμα 3:</u> Διαβάζουμε την κλίμακα στην οποία ο αριθμός 0 βρίσκεται στη μια πλευρά της γωνίας.

Η γωνία $BA\Gamma$ *έχει μέτρο 50 μοίρες, δηλαδή* $B\hat{A}\Gamma = 50°$.

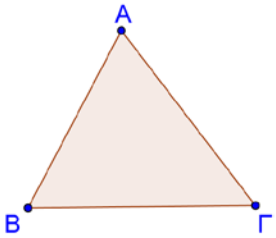


Δραστηριότητες

1. Να ονομάσετε τη διπλανή γωνία με τρεις διαφορετικούς τρόπους.



2. Στο διπλανό σχήμα να ονομάσετε:
   (α) τρεις γωνίες
   (β) τρία ευθύγραμμα τμήματα



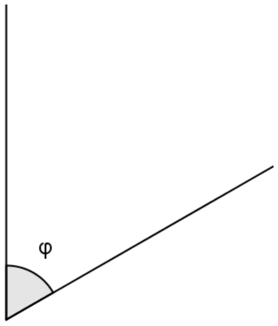
3. Να γράψετε το είδος της κάθε γωνίας στον πιο κάτω πίνακα.

Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας
45°	
190°	
134°	
360°	

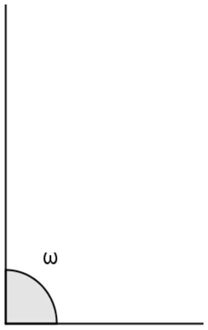
Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας
90°	
180°	
0°	
270°	

4. Να βρείτε με το μοιρογνωμόνιό σας το μέτρο της γωνίας σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

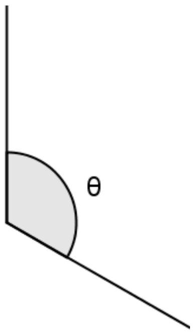
(α)



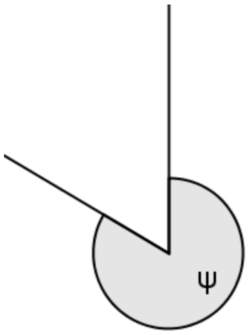
(β)



(γ)



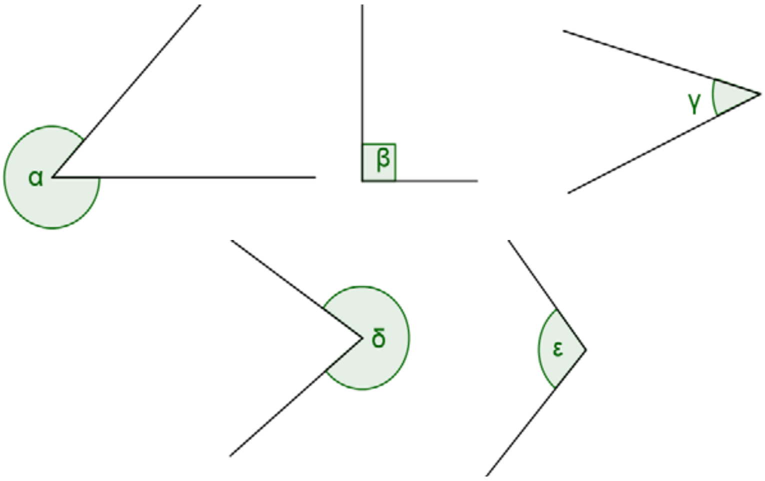
(δ)



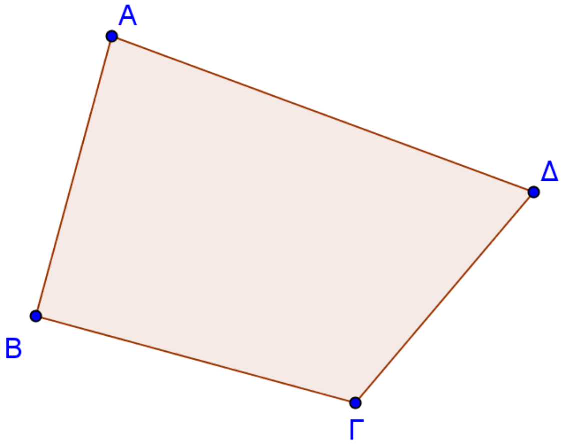
5. Να συγκρίνετε τις πιο κάτω γωνίες και να τις γράψετε κατά σειρά, αρχίζοντας από τη μεγαλύτερη.

6. Να κατασκευάσετε τις γωνίες $\widehat{\alpha} = 60°$, $\widehat{\varphi} = 90°$, $\widehat{\omega} = 132°$, $\widehat{\theta} = 230°$ και $\widehat{\psi} = 270°$. Να εξετάσετε κατά πόσο οι γωνίες είναι κυρτές ή μη κυρτές.

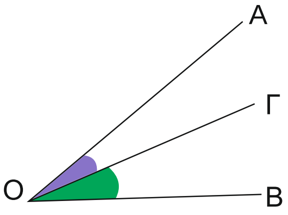
7. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω γωνίες είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές.



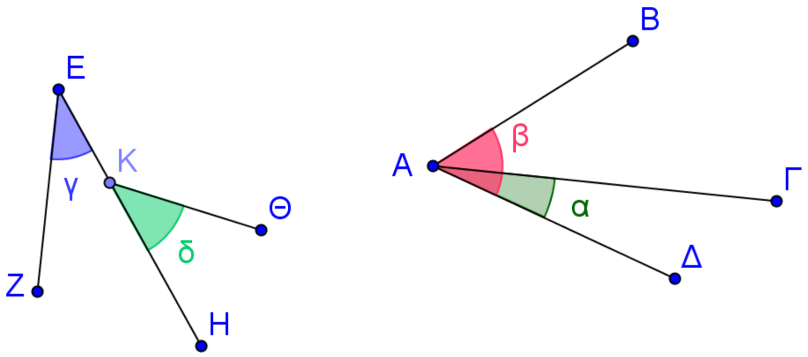
8. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$. Τι παρατηρείτε;



9. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{O}B$ του σχήματος, αν $A\hat{O}\Gamma = 23^o$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 36^o$.



10. Ένας καθηγητής σχεδίασε τις πιο κάτω γωνίες και ρώτησε κατά πόσο υπάρχει ζεύγος εφεξής γωνιών. Ο Παναγιώτης απάντησε ότι το ζεύγος γωνιών $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ είναι εφεξής γωνίες, ενώ ο Γιώργος απάντησε ότι εφεξής γωνίες είναι το ζεύγος $\hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Ο καθηγητής διαφώνησε και με τους δύο. Να εξηγήσετε γιατί ο καθηγητής διαφώνησε.



11. Η Αντωνία πρόσθεσε τα πιο κάτω ζεύγη κυρτών γωνιών:
    (α) $130° + 140° = 270°$
    (β) $20° + 175^o = 195^o$
    (γ) $160° + 150° = 310°$

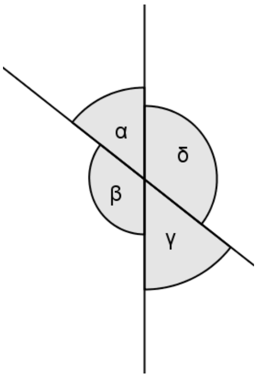
    Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «*Το άθροισμα δύο κυρτών γωνιών είναι μη κυρτή γωνία*». Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι το συμπέρασμα της Αντωνίας είναι λανθασμένο.

12. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του ωροδείκτη και του λεπτοδείκτη σε ένα ρολόι, όταν η ώρα είναι:
    (α) $3:00$
    (β) $12:00$
    (γ) $6:30$

Διχοτόμος Γωνίας – Σχέσεις Γωνιών

Διερεύνηση (1)

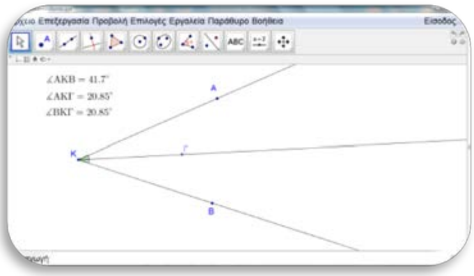
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή γεωμετρικά όργανα για την πιο κάτω κατασκευή:



- ✓ Να κατασκευάσετε δύο ευθείες που τέμνονται. Να μετρήσετε και να συγκρίνετε τις γωνίες που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- ✓ Να μετακινήσετε τις ευθείες σε διάφορες θέσεις και να βρείτε τη σχέση μεταξύ των γωνιών.

Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En5_DihotomosGwnias.ggb».



∠AKB = 41.7°
∠AKΓ = 20.85°
∠BKΓ = 20.85°

- ✓ Να συμπληρώσετε την πρώτη γραμμή του πιο κάτω πίνακα.
- ✓ Να μετακινήσετε τα σημεία A και Γ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα.

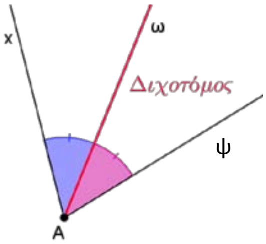
$\measuredangle AKB$	$\measuredangle AK\Gamma$	$\measuredangle BK\Gamma$

- ✓ Να γράψετε τη σχέση που προκύπτει για το μέτρο των πιο πάνω γωνιών.
- ✓ Ποια ιδιότητα έχει η ημιευθεία $K\Gamma$;

Μαθαίνω

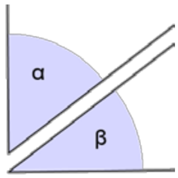
- **Διχοτόμος γωνίας** είναι η ημιευθεία, η οποία έχει ως αρχή την κορυφή της γωνίας και χωρίζει τη γωνία αυτή σε δύο ίσες γωνίες.

Παράδειγμα:
Αω διχοτόμος της $x\hat{A}\psi$ $\Leftrightarrow x\hat{A}\omega = \omega\hat{A}\psi$



- **Συμπληρωματικές** είναι δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μια ορθή γωνία (90°).

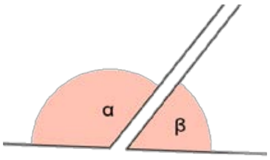
Παράδειγμα:
Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ *και* $\hat{\beta}$ *είναι συμπληρωματικές. Λέμε, επίσης, ότι η γωνία α είναι συμπληρωματική της γωνίας β.*



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^o$

- **Παραπληρωματικές** είναι δύο γωνίες με άθροισμα μια ευθεία γωνία (180°).

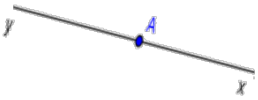
Παράδειγμα:
Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ *και* $\hat{\beta}$ *είναι παραπληρωματικές. Λέμε, επίσης, ότι η γωνία α είναι παραπληρωματική της γωνίας β.*



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^o$

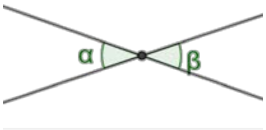
- **Αντικείμενες** ημιευθείες ονομάζονται οι ημιευθείες που ανήκουν στην ίδια ευθεία και έχουν κοινή μόνο την αρχή τους.

Παράδειγμα:
Οι ημιευθείες Αx και Αy είναι αντικείμενες.



- **Κατακορυφήν** είναι δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.
- *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

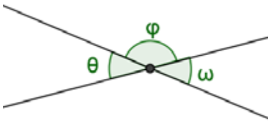
Παράδειγμα:
Οι $\hat{\alpha}$ *και* $\hat{\beta}$ *είναι κατακορυφήν γωνίες. Λέμε, επίσης, ότι η γωνία α είναι κατακορυφήν της γωνίας β.*



$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι οι κατακορυφήν γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\omega}$ είναι ίσες μεταξύ τους.



Λύση:

Για τις γωνίες του σχήματος ισχύει:

$\hat{\theta} + \hat{\varphi} = 180^o$ *παραπληρωματικές.* *Άρα,* $\hat{\theta} = 180^o - \hat{\varphi}$

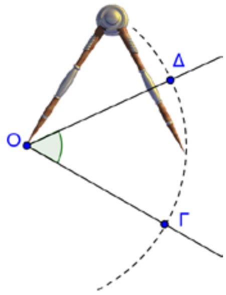
$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o$ *παραπληρωματικές.* *Άρα,* $\hat{\omega} = 180^o - \hat{\varphi}$

Συμπέρασμα $\hat{\theta} = \hat{\omega}$.

2. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μίας γωνίας με χάρακα και διαβήτη.

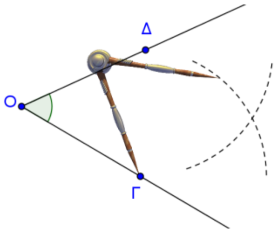
Λύση:

Βήμα 1:



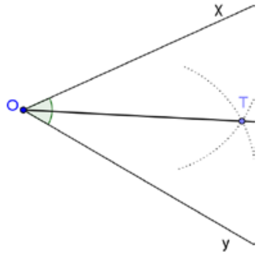
Με κέντρο την κορυφή της γωνίας O γράφουμε τόξο $\Gamma\Delta$.

Βήμα 1:



Στη συνέχεια με κέντρο το σημείο Γ, και στη συνέχεια με κέντρο το σημείο Δ, γράφουμε δύο τόξα με το ίδιο άνοιγμα.

Βήμα 3:

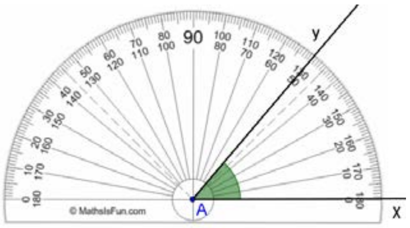


Η ημιευθεία OT, όπου T το σημείο τομής των τόξων, είναι η διχοτόμος της γωνίας xOy.

3. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μίας γωνίας με τη χρήση μοιρογνωμονίου.

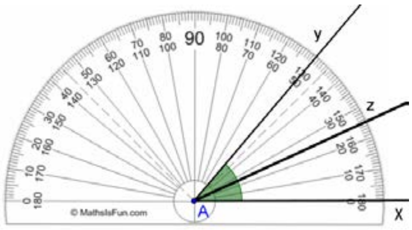
Λύση:

Βήμα 1:
Αρχικά μετράμε τη γωνία.



Το μέτρο της γωνίας xAy είναι 50°. Άρα, το μισό θα είναι $50^\circ : 2 = 25^\circ$.

Βήμα 2:

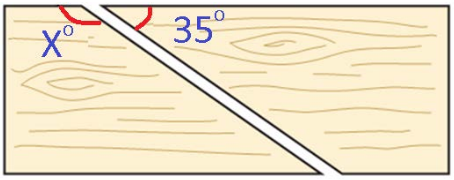


Το μέτρο της γωνίας xAz είναι 25°. Άρα, η ημιευθεία AZ είναι διχοτόμος της $x\hat{A}y$.

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε γωνία $\hat{\beta} = 110°$ και την κατακορυφήν της.

2. Ένας ξυλουργός χρησιμοποιεί δίσκο κοπής με γωνία 35°, για να κόψει ένα σανίδι. Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας x που δημιουργείται από την κοπή;



3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπου είναι δυνατόν:

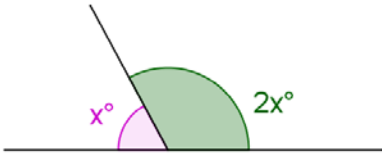
Γωνία $\hat{A}$	Συμπληρωματική της $\hat{A}$	Παραπληρωματική της $\hat{A}$
$42°$	$90^o - 42^o = 48°$	$180^o - 42^o = 138°$
$10°$		
$27°$		
$90°$		
$110°$		
$210°$		
	$33°$	
		$104°$
x^o		

4. (α) Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι τριπλάσια από την παραπληρωματική της.
   (β) Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι 10^o μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της συμπληρωματικής της.
   (γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι ίση με τη συμπληρωματική της.

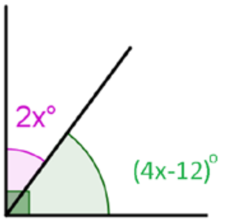
5. Να κατασκευάσετε γωνία $\hat{\alpha} = 65°$ και την εφεξής συμπληρωματική της.

6. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε κάθε περίπτωση.

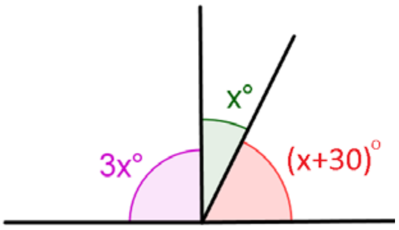
(α)



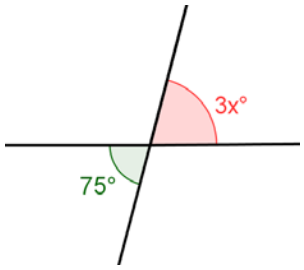
(β)



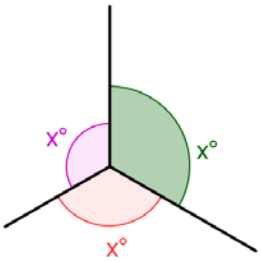
(γ)



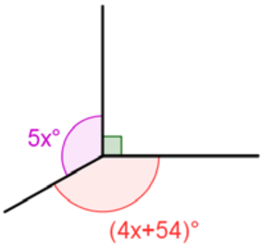
(δ)



(ε)

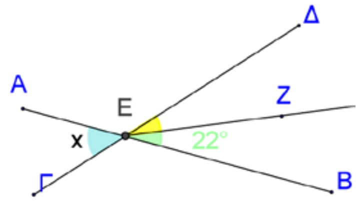


(στ)



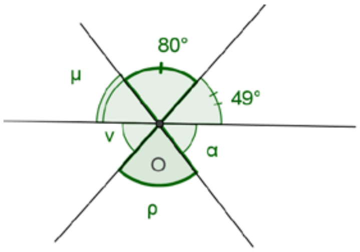
7. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα στα πιο κάτω σχήματα:

(α)

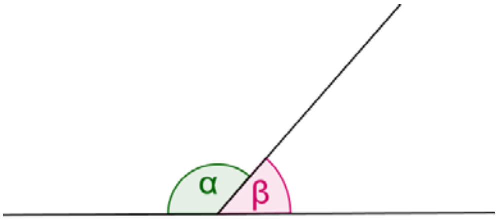


ΕΖ διχοτόμος

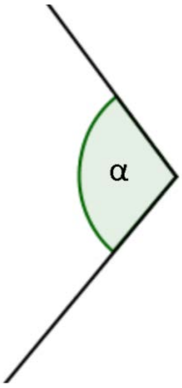
(β)

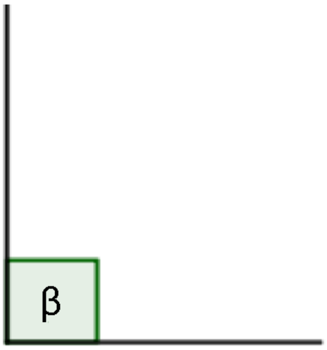


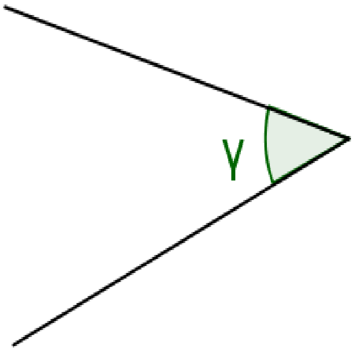
8. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας που δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών α και β στο πιο κάτω σχήμα.

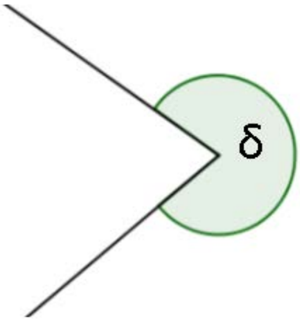


9. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο σε καθεμιά από τις πιο κάτω γωνίες.





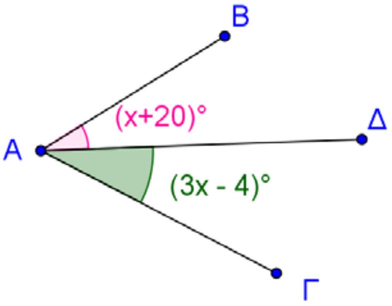




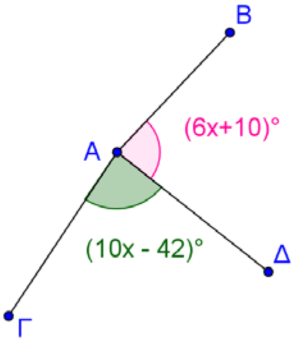
10. Να κατασκευάσετε τη γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 32^{o}$. Σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να φέρετε την ημιευθεία ΑΓ και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$, αν:
    (α) Η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Delta$.
    (β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.
    (γ) Η AB είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}\Delta$.

11. Στα πιο κάτω σχήματα η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε κάθε περίπτωση.

(α)



(β)



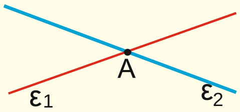
Κάθετες Ευθείες
Απόσταση Σημείου από Ευθεία
Απόσταση Παράλληλων Ευθειών

Έχουμε μάθει ...

Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

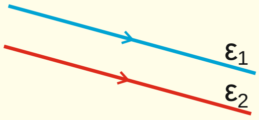
- Δύο ευθείες **τέμνονται** όταν έχουν ένα κοινό σημείο. Το κοινό τους σημείο ονομάζεται **σημείο τομής**.

  Παράδειγμα:
  Το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το Α.

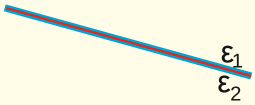


- Δύο ευθείες λέγονται **παράλληλες** όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

  Παράδειγμα:
  Η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη με την ευθεία ε_2 και γράφουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

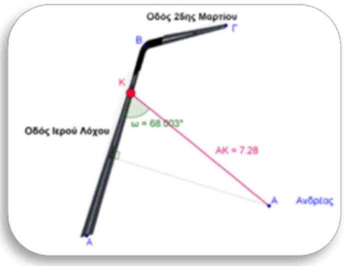


- Δύο ευθείες λέγεται ότι **ταυτίζονται** όταν έχουν όλα τους τα σημεία κοινά.



Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο: *«A_En5_Apostasi_simeiou_apo_eftheia.ggb»*

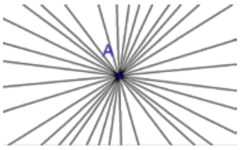


✓ Να βρείτε τη θέση του σημείου K πάνω στην ευθεία AB, έτσι ώστε ο Ανδρέας να κάνει την πιο μικρή διαδρομή για να πάει στην οδό «Ιερού Λόχου».

Μαθαίνω

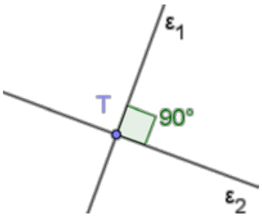
- Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μια ευθεία.

- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

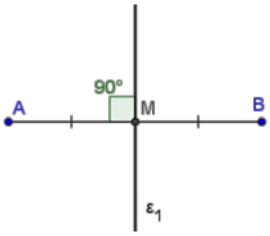


- **Κάθετες** ονομάζονται δύο ευθείες που τέμνονται και σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία.

  Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ δηλώνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα.
  Το $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ διαβάζεται «η ευθεία ε_1 είναι κάθετη με την ευθεία ε_2 » ή «οι ε_1και ε_2είναι κάθετες μεταξύ τους».

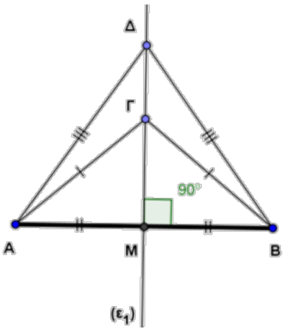


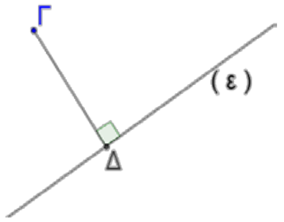
- **Μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και περνά από το μέσο του.
  Παράδειγμα:
  Αν M μέσο AB και $\varepsilon_1 \perp AB$, τότε ε_1 μεσοκάθετος του AB.



➢ *Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, ισαπέχει από τα άκρα του.*

Παράδειγμα:
Αν ε_1 μεσοκάθετος του AB, τότε $A\Gamma = \Gamma B$ και $A\Delta = \Delta B$.

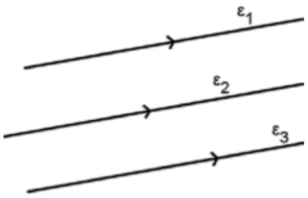




- **Η απόσταση σημείου από ευθεία** είναι ίση με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ξεκινά από το σημείο και είναι κάθετο στην ευθεία.

  Παράδειγμα:

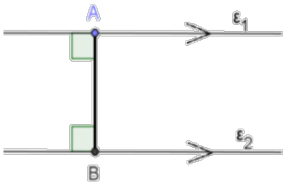
  Η απόσταση του σημείου $Γ$ από την ευθεία $ε$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΓΔ$ που είναι κάθετο στην ευθεία $ε$.



- Αν δύο ευθείες $ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες με μία τρίτη ευθεία $ε_1$, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

  Παράδειγμα:

  Αν $ε_2 \parallel ε_1$ και $ε_3 \parallel ε_1$ τότε $ε_2 /\!/ ε_3$



- Δύο ευθείες είναι παράλληλες, αν είναι και οι δύο κάθετες σε μια τρίτη ευθεία.
- **Απόσταση παράλληλων ευθειών** ονομάζεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σε αυτές.

  Παράδειγμα:

  Η απόσταση των παραλλήλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

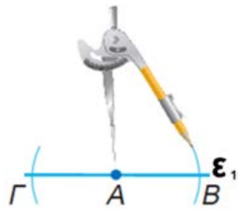
Παραδείγματα

1. Από σημείο A της ευθείας $ε_1$, να φέρετε κάθετη σε αυτή:
   (α) με χάρακα και διαβήτη,
   (β) με χάρακα και γνώμονα,
   (γ) με μοιρογνωμόνιο

Λύση:

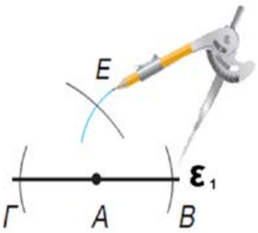
(α) ***Κατασκευή με χάρακα και διαβήτη***

Βήμα 1:



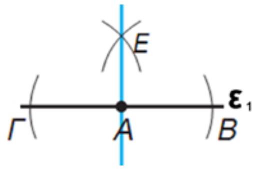
Με κέντρο το A γράφουμε τόξα που τέμνουν την ευθεία $ε_1$ στα σημεία B και $Γ$.

Βήμα 2:



Με άνοιγμα του διαβήτη μεγαλύτερο του $AΓ$ και με κέντρα το $Γ$ και το B, γράφουμε δύο τόξα που τέμνονται στο E.

Βήμα 3:



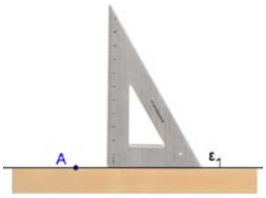
Φέρουμε την ευθεία AE. Η AE είναι κάθετη με τη $BΓ$.

(β) *Κατασκευή* ***με χάρακα και γνώμονα***

Βήμα 1:

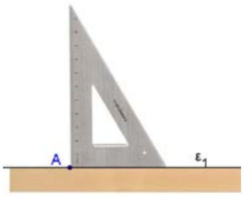
Τοποθετούμε τον χάρακα πάνω στην ευθεία.

Βήμα 2:



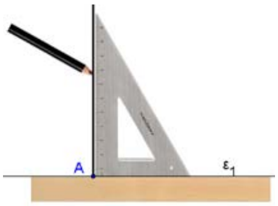
Τοποθετούμε τον γνώμονα πάνω στον χάρακα.

Βήμα 3:



Μετατοπίζουμε τον γνώμονα μέχρι να ακουμπήσει το σημείο A.

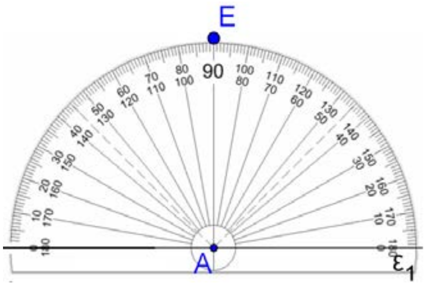
Βήμα 4:



Φέρουμε την κάθετη με το μολύβι.

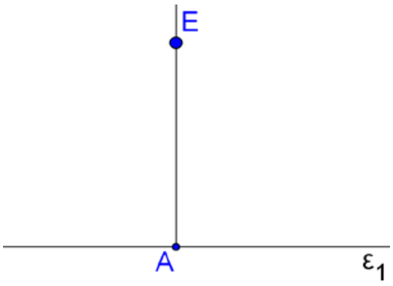
(γ) *Κατασκευή* ***με μοιρογνωμόνιο***

Βήμα 1:



Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμονίου στο σημείο A και την ένδειξη 0 πάνω στην ευθεία ε_1. Γράφουμε το σημείο E στην ένδειξη 90°.

Βήμα 2:



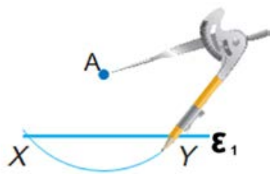
Γράφουμε την ευθεία AE.

2. Από σημείο A εκτός ευθείας ε_1 να φέρετε κάθετη σε αυτή:
   (α) με χάρακα και διαβήτη,
   (β) με χάρακα και γνώμονα.

Λύση:

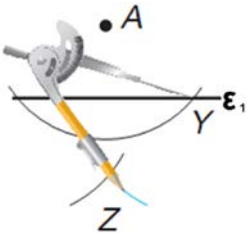
(α) Κατασκευή **με χάρακα και διαβήτη**

<u>Βήμα 1:</u>



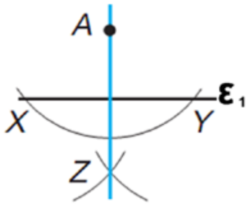
Με κέντρο το σημείο A γράφουμε τόξο που τέμνει την ευθεία ε_1 στα σημεία X και $Υ$.

<u>Βήμα 2:</u>



Με άνοιγμα του διαβήτη μεγαλύτερο του μισού του $XΥ$, γράφουμε τόξα με κέντρα το X και το $Υ$ που τέμνονται στο Z.

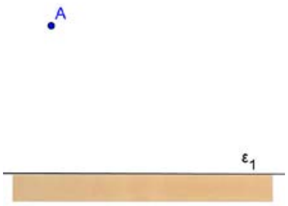
<u>Βήμα 3:</u>



Με τον χάρακα φέρουμε την ευθεία AZ που είναι κάθετη με την ευθεία ε_1.

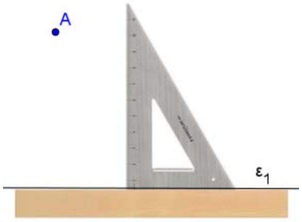
(β) Κατασκευή **με χάρακα και γνώμονα**

<u>Βήμα 1:</u>



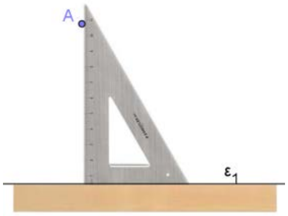
Τοποθετούμε τον χάρακα στην ευθεία ε_1.

<u>Βήμα 2:</u>



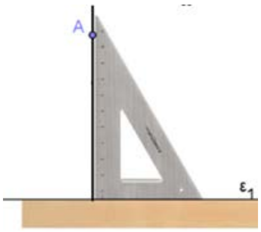
Τοποθετούμε τον γνώμονα πάνω στον χάρακα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

<u>Βήμα 3:</u>



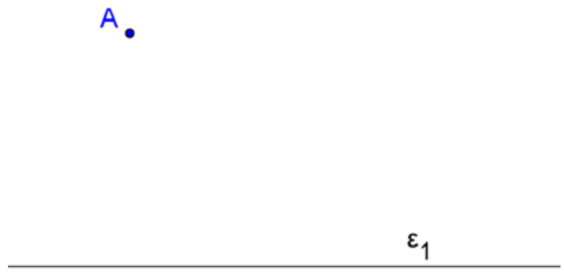
Μετατοπίζουμε τον γνώμονα μέχρι να ακουμπήσει το σημείο A.

<u>Βήμα 4:</u>



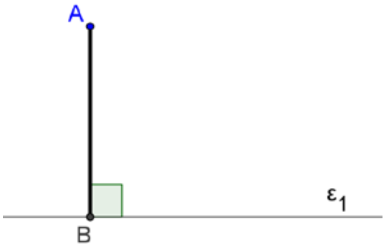
Φέρουμε την κάθετη στην ε_1 που περνά από το σημείο A.

3. Να μετρήσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_1.



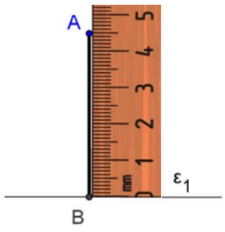
Λύση:

Βήμα 1:



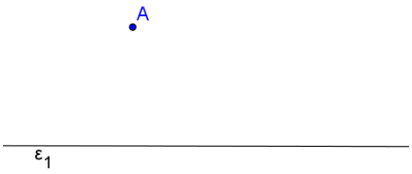
Φέρω την κάθετη AB από το A στην ευθεία ε_1.

Βήμα 2:



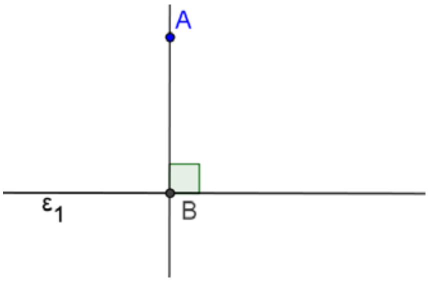
Μετρώ το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.
$AB = 4{,}5\ cm$

4. Από σημείο A εκτός της ευθείας ε_1, να κατασκευάσετε ευθεία ε_2 που να είναι παράλληλη με την ε_1.



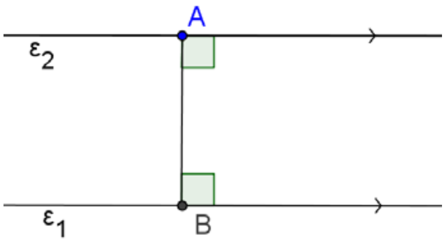
Λύση:

Βήμα 1:



Φέρουμε $AB \perp \varepsilon_1$.

Βήμα 2:



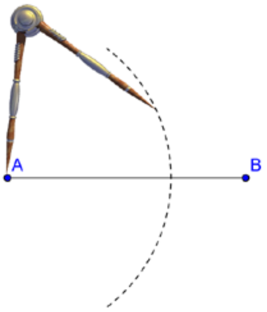
Από το A φέρουμε $\varepsilon_2 \perp AB$.

5. Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

Λύση:

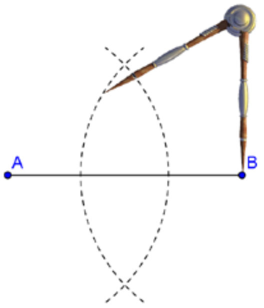
Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, όπως εργαστήκαμε και για την κατασκευή του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

Βήμα 1:



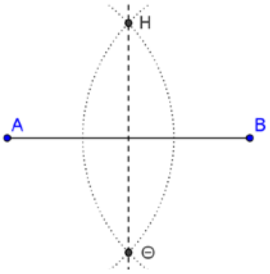
Ανοίγουμε τον διαβήτη περισσότερο από το μισό μήκος του AB. *Με κέντρο το άκρο* A *γράφουμε τόξο.*

Βήμα 2:



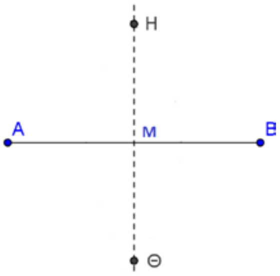
Διατηρώντας το ίδιο άνοιγμα του διαβήτη και με κέντρο το άκρο B, *γράφουμε νέο τόξο.*

Βήμα 3:



Φέρουμε ευθεία που περνά από τα σημεία τομής H *και* Θ *των δύο τόξων.*

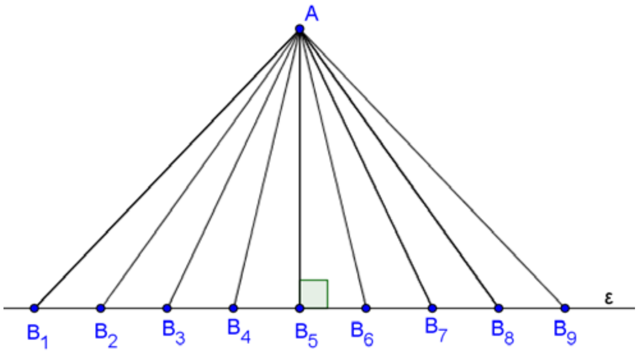
Βήμα 4:



Το σημείο M *είναι μέσο του* AB *και* $H\Theta \perp AB$. *Άρα, η* $H\Theta$ *είναι μεσοκάθετη της* AB.

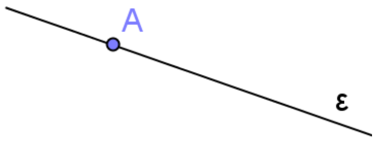
Δραστηριότητες

1. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία $B_1, B_2, \dots, B_9$ είναι σημεία της ευθείας ε. Να εξετάσετε ποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα AB_1, AB_2, … , AB_9 έχει το πιο μικρό μήκος.



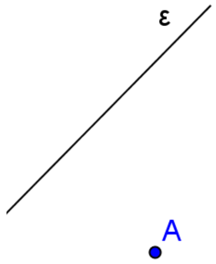
2. Από το σημείο A να φέρετε κάθετη στην ευθεία ε σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

(α)

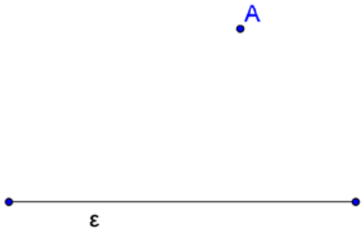


(β)

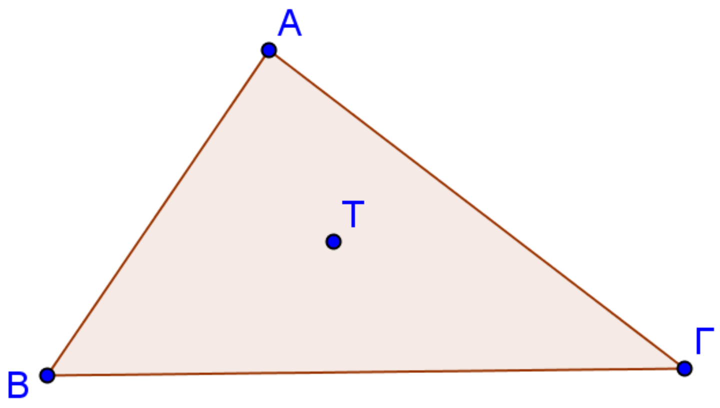
(γ)



(δ)



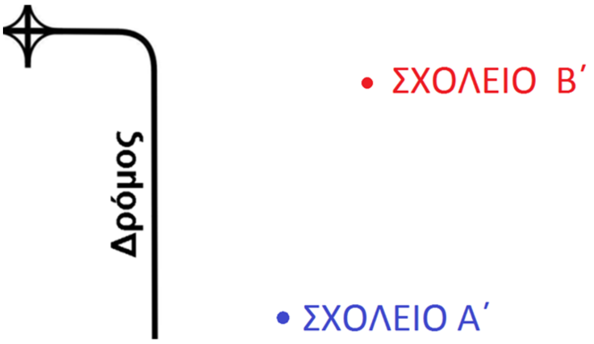
3. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου T από τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.



4. Να κατασκευάσετε γωνία $x\hat{O}y$, να φέρετε τη διχοτόμο της και να κατασκευάσετε σε αυτή ένα σημείο A. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου από τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις αυτές.

5. Να κατασκευάσετε ευθεία ε_1. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ευθεία ε_2 που να απέχει 2 cm από την ε_1.

6. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται δυο σχολεία (Σχολείο Α΄ και Σχολείο Β΄). Ο Δήμαρχος θέλει να τοποθετήσει μια στάση στον πιο κοντινό δρόμο για το σχολικό λεωφορείο. Να βοηθήσετε τον Δήμαρχο να βρει σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετήσει τη στάση, έτσι ώστε να ισαπέχει από τα δύο σχολεία.



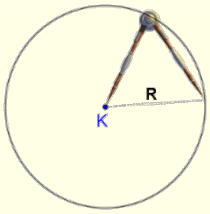
7. Στο πιο κάτω χάρτη:
   - (α) Να σχηματίσετε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τη Λευκωσία με τη Λεμεσό και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την Πάφο με τη Λεμεσό.
   - (β) Να μετρήσετε την κυρτή γωνία που σχηματίζεται από τις πόλεις Πάφος – Λεμεσός – Λευκωσία.
   - (γ) Να σχηματίσετε τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος Λευκωσίας – Λάρνακας.

Βασικά Στοιχεία Κύκλου

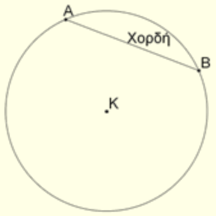
Έχουμε μάθει…

- **Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου.
  Γράφουμε για συντομία κύκλος (K, R).

  Δύο κύκλοι με την ίδια ακτίνα είναι ίσοι.



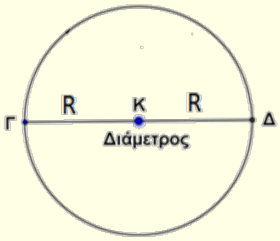
- **Χορδή κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του πάνω στον κύκλο.
  Παράδειγμα:
  η ΑΒ είναι χορδή του κύκλου.



- **Διάμετρος κύκλου** είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου.

  Το κέντρο Κ του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου.

  Παράδειγμα:
  η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.



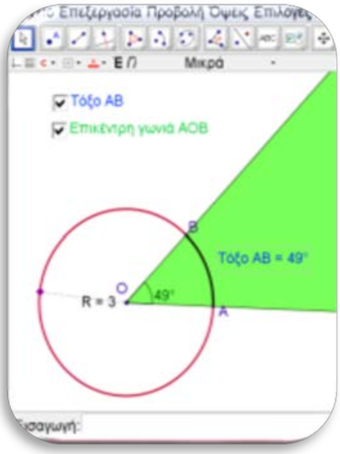
Το εφαρμογίδιο «A_En5_Stoixeia_Kyklou.ggb» θα σας βοηθήσει να θυμηθείτε τα πιο πάνω.

Διερεύνηση (1)

Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο Ψ.Ε.Π. *«P02_A_DEC12/S01-01/index.html»*, για να σας βοηθήσει να επιλύσετε το πιο κάτω πρόβλημα.

Πώς θα κατασκευάσετε έναν κύκλο με διάμετρο 6 m, αν το μόνο εργαλείο που έχετε στη διάθεσή σας είναι ένα σχοινί μήκους 3 m και δύο μικρά κλαδιά;

Διερεύνηση (2)

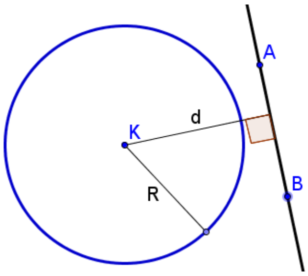


Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Sxesi_eggegramenis_toxou.ggb»*.

- ✓ Να μετακινήσετε τα σημεία A και B και να εξετάσετε ποια σχέση συνδέει το μέτρο ενός τόξου με το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}B$.
- ✓ Να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Διερεύνηση (3)

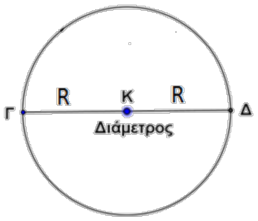
Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Thesi_eftheias_kyklou»*.



- ✓ Να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας ή τη θέση της ευθείας AB, ώστε η ευθεία να έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.
- ✓ Ποια είναι η σχέση της ακτίνας R με την απόσταση d του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
- ✓ Να επαναλάβετε τη διαδικασία και να βρείτε τη σχέση μεταξύ R και d, όταν η ευθεία τέμνει τον κύκλο και όταν η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο.

Μαθαίνω

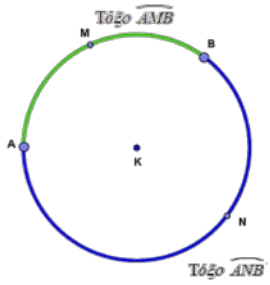
- Κάθε διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή κύκλου και έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα (R), δηλαδή $\Gamma\Delta = 2R$.



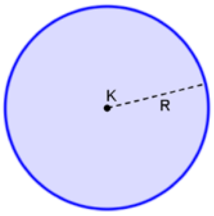
- Δύο σημεία A και B του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη, που το καθένα ονομάζεται **τόξο** $\overset{\frown}{AB}$ **του κύκλου** με άκρα A και B.

  Τα δύο τόξα συμβολίζονται $\overset{\frown}{AMB}$ και $\overset{\frown}{ANB}$, όπου Μ και Ν είναι ενδιάμεσα σημεία των αντίστοιχων τόξων.

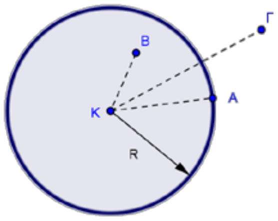
➢ *Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη που ονομάζονται ημικύκλια.*



- **Κυκλικός δίσκος** (K, R) είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.
  Κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου απέχει από το κέντρο K απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα R.



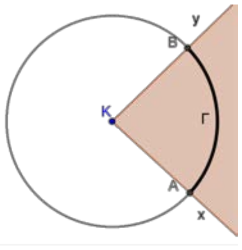
- Αν για το σημείο A ισχύει $KA = R$, τότε το σημείο A **ανήκει** στον κύκλο.
- Αν για το σημείο B ισχύει $KB < R$, τότε το σημείο Β ονομάζεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου.
- Αν για το σημείο Γ, $K\Gamma > R$, τότε το σημείο Γ ονομάζεται **εξωτερικό** σημείο του κύκλου.



- **Επίκεντρη γωνία** είναι η γωνία, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου, π.χ. $\angle yKx$.
- Το τόξο, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης.

Παράδειγμα:

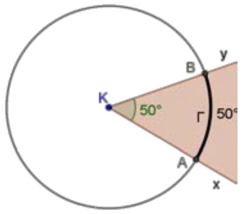
Το $\overset{\frown}{AB}$ *είναι το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης* $\angle yKx$ *και η* $\angle AKB$ *βαίνει στο τόξο* $\overset{\frown}{AB}$.



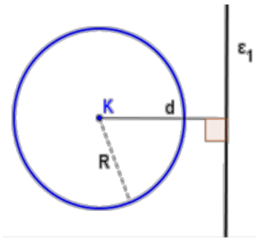
- Σε τόξο μ μοιρών (συμβολικά $\mu°$) βαίνει επίκεντρη γωνία επίσης $\mu°$.

Παράδειγμα:

το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ *έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας του* $\chi\widehat{K}y = 50^o$

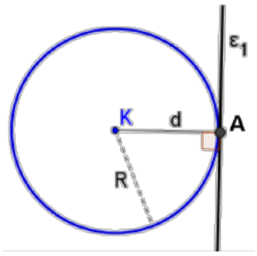


Θέση Ευθείας και Κύκλου

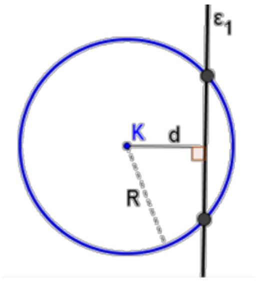


- Η ευθεία ε_1 είναι **εξωτερική** του κύκλου, αν $d > R$.
  Η ευθεία και ο κύκλος **δεν έχουν κοινά σημεία**.

(Το d συμβολίζει την απόσταση κέντρου K από την ευθεία ε_1 και το R συμβολίζει την ακτίνα του κύκλου)



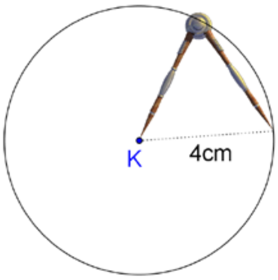
- Η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου, αν $\mathrm{d} = \mathrm{R}$
  Η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο.
  $\mathrm{KA} \perp \varepsilon_1$



- Η ευθεία ε_1 τέμνει τον κύκλο, αν $\mathrm{d} < \mathrm{R}$
  Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία.

Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$.



Λύση:

Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο $(K, 4\ cm)$, τοποθετούμε σημείο Κ που θα είναι το κέντρο του κύκλου και ανοίγουμε το διαβήτη ώστε τα άκρα του να απέχουν μεταξύ τους $4\ cm$. Τοποθετούμε το μεταλλικό άκρο του διαβήτη σταθερά στο σημείο Κ και το άλλο άκρο του διαβήτη στο χαρτί. Στη συνέχεια περιστρέφουμε το διαβήτη μια ολόκληρη στροφή στο επίπεδο και το σχήμα που δημιουργείται είναι κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα $4\ cm$.

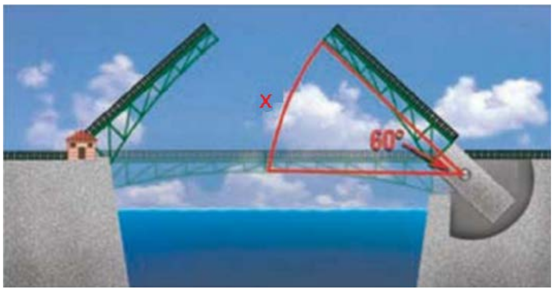
Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε:
   (α) κύκλο με κέντρο K και ακτίνα 5 cm,
   (β) κύκλο με διάμετρο 80 mm.

2. Να κατασκευάσετε δύο ομόκεντρους κύκλους (κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο) με ακτίνες 2 cm και 28 mm.

3. Σε κύκλο $(K, 6\ cm)$ να κατασκευάσετε:
   (α) Μία διάμετρο AB.
   (β) Μία επίκεντρη γωνία $\Gamma\widehat{K}\Delta$.
   (γ) Δύο ακτίνες KE και KZ.
   (δ) Μία χορδή $E\Theta$.
   (ε) Ένα τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BZH}}$.

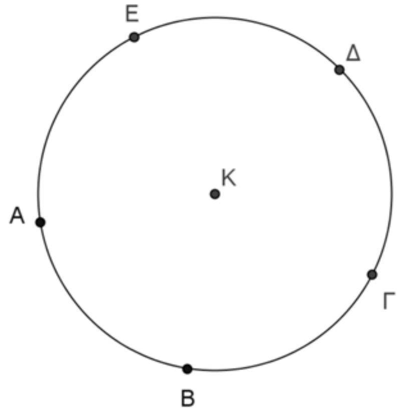
4. Στην πιο κάτω φωτογραφία φαίνεται μια γέφυρα που ανοίγει. Η γωνία που σχηματίστηκε από την οριζόντια θέση μέχρι το σημείο ανοίγματος είναι 60°. Να βρείτε το μέτρο του τόξου x.



Οι δραστηριότητες 5 και 6 μπορεί να γίνουν και με τη χρήση λογισμικού Geogebra ή γεωμετρικών οργάνων.

5. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 5\ cm)$, χορδή $AB = 3\ cm$, επίκεντρη γωνία $B\widehat{K}\Gamma = 60°$ και τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ που να αντιστοιχεί σε γωνία 45°.

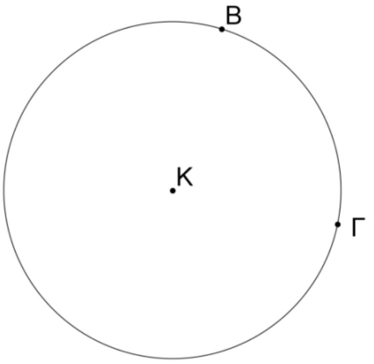
6. Να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{ΔΕΑ}$ και $\overset{\frown}{ΔΑΕ}$, αν $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{ΓΔ} = \overset{\frown}{ΔΕ} = \overset{\frown}{ΕΑ}$.



7. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$ και χορδές $AB = ΔE\ =\ 3\ cm.$
   (α) Να μετρήσετε τις επίκεντρες γωνίες $A\widehat{K}B$ και $Δ\widehat{K}E$.
   (β) Να υπολογίσετε το μέτρο των τόξων $AB\ και\ ΔE$.

8. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$ και στη συνέχεια να φέρετε ευθεία $ε_1$ που να απέχει $3\ cm$ από το κέντρο του κύκλου. Ποια είναι η θέση της ευθείας σε σχέση με τον κύκλο;

9. Στο σχήμα να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και $Γ$. Αν οι εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο A, να συγκρίνετε:
   (α) Τις αποστάσεις AB και $AΓ$.
   (β) Τις αποστάσεις των σημείων B και $Γ$ από το ευθύγραμμο τμήμα KA.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να ονομάσετε μια ευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ημιευθεία και ένα σημείο, με τη βοήθεια του πιο κάτω σχήματος.

2. Να κατασκευάσετε με μοιρογνωμόνιο γωνίες $\alpha = 60^o$, $\beta = 100^o$ και $\gamma = 200^o$και να φέρετε τη διχοτόμο της καθεμιάς.

3. Να γράψετε δίπλα από κάθε γωνία το είδος της (οξεία, αμβλεία, ορθή, ευθεία, πλήρης, μη κυρτή, μηδενική).

Μέτρο Γωνίας	Είδος Γωνίας
98°	
270°	
180°	
181°	
0°	
90°	
360°	
117°	

4. Να απαντήσετε τις ερωτήσεις:
   (α) Τι είναι η μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος;
   (β) Ποιες γωνίες ονομάζονται εφεξής;
   (γ) Τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας;
   (δ) Ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;

5. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι τετραπλάσια από τη συμπληρωματική της.

6. Να υπολογίσετε τη γωνία που έχει μέτρο ίσο με το 20% της παραπληρωματικής της.

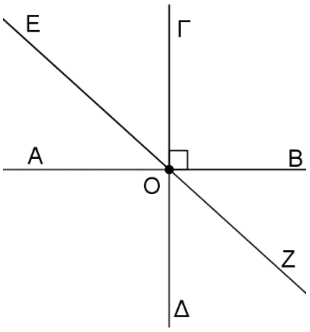
7. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 10\ cm$ και να φέρετε τη μεσοκάθετή του.

8. Να χαρακτηρίσετε με ορθό ή λάθος καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις.

(α)	Μια ευθεία γωνία είναι ίση με δύο ορθές γωνίες	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ
(β)	Η διχοτόμος μιας αμβλείας γωνίας χωρίζει τη γωνία σε δύο οξείες γωνίες.	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δύο γωνίες με κοινή κορυφή και κοινή πλευρά είναι πάντοτε εφεξής.	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε καθεμιά είναι αμβλεία.	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ
(ε)	Δύο κατακορυφήν γωνίες μπορεί να είναι παραπληρωματικές.	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η διάμετρος ενός κύκλου (O, ρ) είναι πάντα 2ρ.	ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ

9. Στο διπλανό σχήμα $AB \perp \Gamma\Delta$.
Να βρείτε:

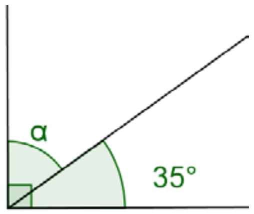
(α) Δύο εφεξής γωνίες.
(β) Δύο κατακορυφήν γωνίες.
(γ) Μια ευθεία γωνία.
(δ) Δύο συμπληρωματικές γωνίες.
(ε) Δύο παραπληρωματικές γωνίες.
(στ) Τρεις διαδοχικές γωνίες.



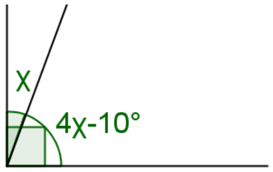
10. Να κατασκευάσετε δύο εφεξής γωνίες $A\hat{O}B = 20^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$. Να κατασκευάσετε τυχαίο σημείο Δ στην κοινή τους πλευρά και να φέρετε τις κάθετες ΔZ και ΔH στις ημιευθείες OA και $O\Gamma$, αντίστοιχα. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις ΔZ και ΔH.

11. Να υπολογίσετε την τιμή των $\alpha, \gamma, \chi, \omega, y, \delta, \theta$ και κ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

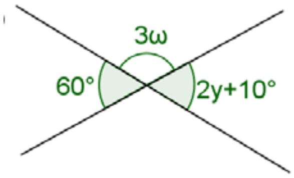
(α)



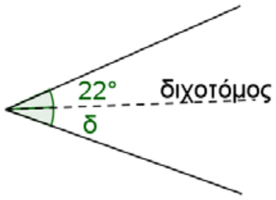
(β)



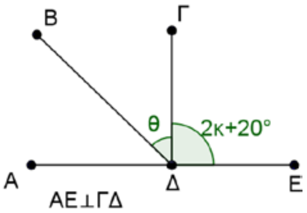
(γ)



(δ)



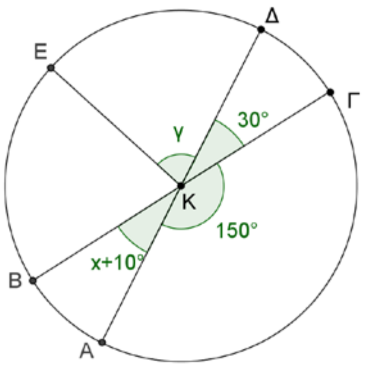
(ε)



ΑΕ⊥ΓΔ

ΔΒ διχοτόμος ∡ΑΔΓ

(στ)

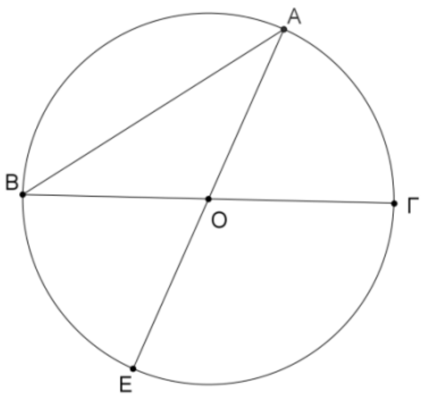


(Κ,ΚΕ) κύκλος

ΕΚ διχοτόμος ∡ΒΚΔ

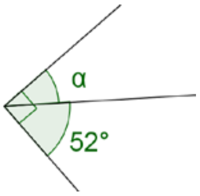
12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα βάζοντας ✓ στην κατάλληλη θέση.

Ευθ. Τμήμα	Ακτίνα	Διάμετρος	Χορδή
OA			
OB			
$B\Gamma$			
AB			
AE			
EO			

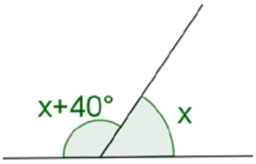


13. Να υπολογίσετε την τιμή των x, ω, α, β, σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

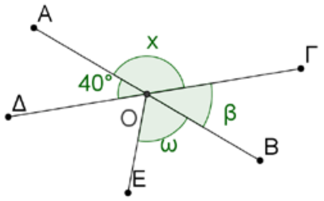
(α)



(β)

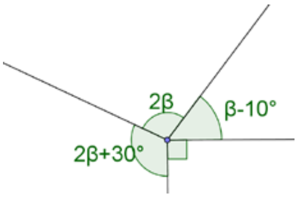


(γ)

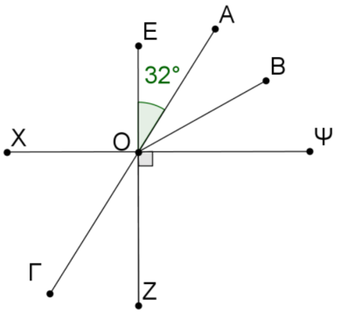


ΟΕ διχοτόμος της ∡ΔΟΒ

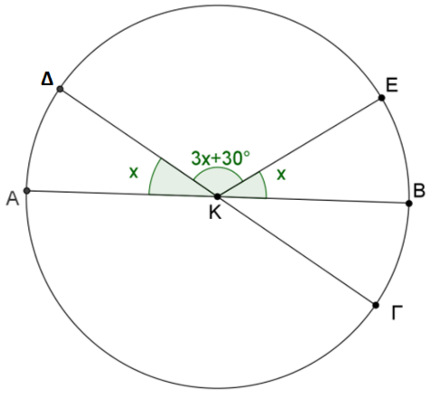
(δ)



14. Στο σχήμα $X\Psi \perp EZ$, η OB είναι διχοτόμος της $\measuredangle A O \Psi$ και η $\measuredangle A O \Gamma$ είναι ευθεία γωνία. Να υπολογίσετε τις γωνιές $\measuredangle \Psi O B$, $\measuredangle \Gamma O Z$, $\measuredangle Z O B$.



15. Δίνεται κύκλος (K, R). Να υπολογίσετε την τιμή του x, το μέτρο του τόξου $EB\Gamma$ και την επίκεντρη γωνία $\Delta\widehat{K}E$.



16. Ο Γιάννης προσπαθεί να κατασκευάσει ένα ξύλινο ρολόι, για να διακοσμήσει το δωμάτιό του. Να τον βοηθήσετε;
    (α) να βρει το κέντρο του ξύλινου κομματιού, για να τοποθετήσει τους δείκτες,
    (β) να βρει την κατάλληλη θέση, για να τοποθετήσει τους αριθμούς 1 μέχρι 12.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Στη συνέχεια να βρείτε τα μέσα M και N των πλευρών AB και $\Delta\Gamma$. Ποια είναι η σχέση που συνδέει το μήκος MN με τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$;

2. Με τη χρήση λογισμικού Geogebra να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετη ε του ευθύγραμμου τμήματος AB. Να κατασκευάσετε ένα σημείο Γ στην ε και να φέρετε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Gamma$. Τι παρατηρείτε για το μήκος των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ και για το μέτρο των $\measuredangle \Gamma AB$ και $\measuredangle \Gamma BA$;

3. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα $AB = \Gamma\Delta = 4\ cm$, ώστε $AB \perp \Gamma\Delta$ και το M να είναι το μέσο των AB και $\Gamma\Delta$.

4. Αν τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, Γ, Δ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, να βρείτε την τομή των επιπέδων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$.

5. Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά σημεία και τα σημεία M και N είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB και $B\Gamma$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $MN = \frac{AB + B\Gamma}{2}$.

6. Δίνονται τα σημεία $A(4,0)$, $B(0,6)$ και $O(0,0)$. Να βρείτε ένα σημείο Γ που να ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας AOB.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Διανύσματα

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε το διάνυσμα.
- Να ορίζουμε τις σχέσεις μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ομόρροπα, αντίρροπα, ίσα και αντίθετα διανύσματα).
- Να προσθέτουμε και να αφαιρούμε διανύσματα.

Η Έννοια του Διανύσματος

Διερεύνηση (1)

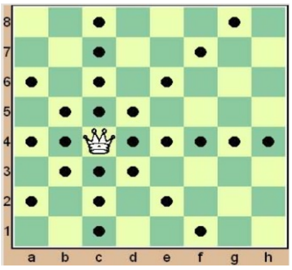
Το παιχνίδι του σκακιού παίζεται μεταξύ δύο αντιπάλων που κινούν εναλλάξ τα κομμάτια τους πάνω σε μια τετράγωνη επιφάνεια που λέγεται «σκακιέρα». Ο παίκτης με τα λευκά κομμάτια αρχίζει το παιχνίδι.

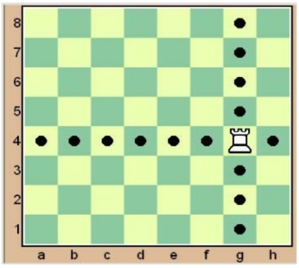
Ο στόχος κάθε παίκτη είναι να «επιτεθεί» στον Βασιλιά του αντιπάλου του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίπαλος να μην έχει κίνηση.

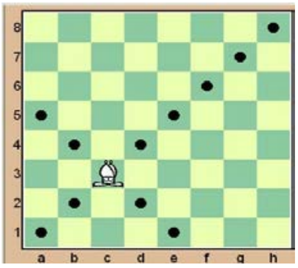
Στο ξεκίνημα του παιχνιδιού ο ένας παίκτης έχει 16 ανοιχτόχρωμα κομμάτια (τα «λευκά» κομμάτια) και ο άλλος έχει 16 σκουρόχρωμα κομμάτια (τα «μαύρα» κομμάτια).

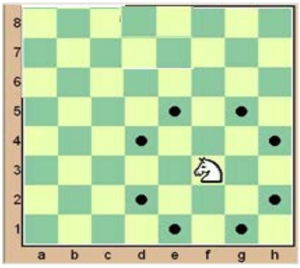
ΚΟΜΜΑΤΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΑΡΧΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΗ ΣΚΑΚΙΕΡΑ
Βασιλιάς	♔ ♚	
Βασίλισσα	♕ ♛	
Πύργος	♖ ♜	
Αξιωματικός	♗ ♝	
Άλογο	♘ ♞	
Πιόνι	♙ ♟	

Το κάθε κομμάτι μπορεί να κινηθεί σε μια νέα θέση σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες που διέπουν το σκάκι. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι τρόποι που κινούνται η βασίλισσα, ο πύργος, το άλογο και ο αξιωματικός.





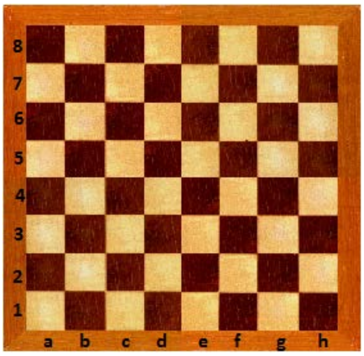




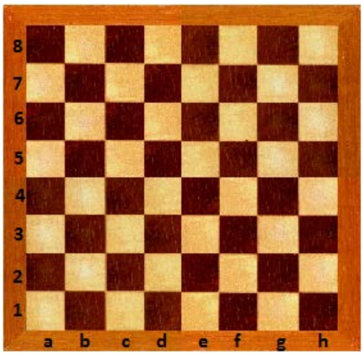
Η Βασίλισσα κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, ο πύργος κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια και κατακόρυφα, ο αξιωματικός κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο διαγώνια και το άλογο κινείται σε ένα από τα πλησιέστερα τετράγωνα από αυτό που βρίσκεται αλλά όχι στην ίδια οριζόντια ή κατακόρυφη ή διαγώνιο.

- ✓ Στη σκακιέρα A να τοποθετήσετε μια βασίλισσα στη θέση $(f,7)$. Να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα B να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση $(d,4)$. Να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα Γ να τοποθετήσετε έναν πύργο στη θέση $(c,3)$. Να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα Δ να τοποθετήσετε έναν αξιωματικό στη θέση $(e,6)$. Να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

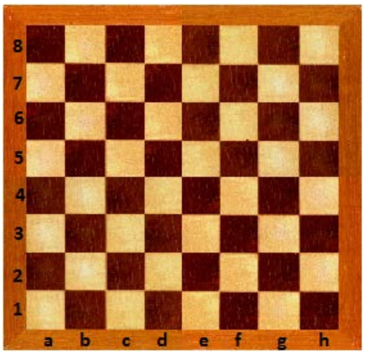
Α



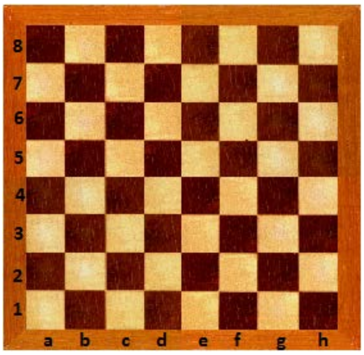
Β



Γ

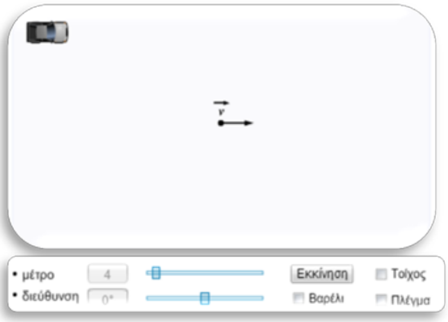


Δ



Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_1.1»*.



μέτρο 4

διεύθυνση 0°

- *Να επιλέξετε το εικονίδιο «Εκκίνηση», για να αρχίσει το αυτοκίνητο να κινείται με ορισμένη ταχύτητα και προς ορισμένη κατεύθυνση. Με το εικονίδιο «Εκκίνηση» μπορείτε να σταματήσετε το αυτοκίνητο.*

- *Με τον δρομέα «Μέτρο» μεταβάλλεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο και με το δρομέα «Διεύθυνση» περιστρέφεται το αυτοκίνητο και καθορίζεται η πορεία που θα ακολουθήσει.*

- *Να επιλέξετε τα εικονίδια, «Τοίχος» και «Βαρέλι» και να οδηγήσετε το αυτοκίνητο ώστε να συγκρουστεί με το βαρέλι, αποφεύγοντας τους τοίχους.*

✓ Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε περίπτωση.

Μαθαίνω

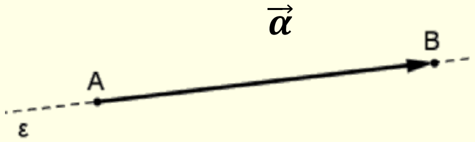
- **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.

  Παράδειγμα:
  Το μήκος, η μάζα, η θερμοκρασία είναι μονόμετρα μεγέθη.

- **Διανυσματικό μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που έχει μέτρο και κατεύθυνση.

  Παράδειγμα:
  Η ταχύτητα, η δύναμη είναι διανυσματικά μεγέθη.

- Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** τα οποία συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο A που είναι η **αρχή** και λέγεται **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος και ένα σημείο B το **τέλος** του διανύσματος. Το διάνυσμα το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB}$ ή με $\vec{\alpha}$.



- Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:
  - τη **διεύθυνση**, που είναι η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα A, B ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

  - τη **φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το A και τέλος το B ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το B και τέλος το A ($\overrightarrow{BA}$).

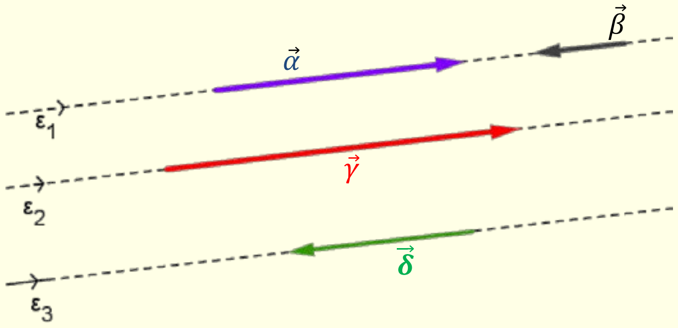
  - το **μέτρο**, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε θετικός αριθμός ή μηδέν.

*Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος.*

- Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό,** όταν η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{0}$ και έχει μέτρο μηδέν.

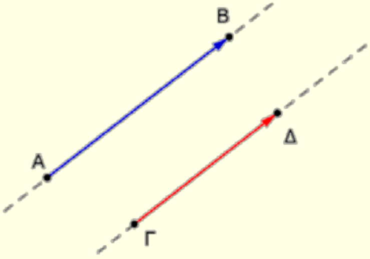
- **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση**.**

Παράδειγμα:
Τα πιο κάτω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι μεταξύ τους παράλληλα ή συγγραμμικά.



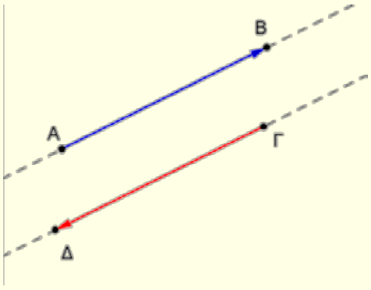
- Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
  - Τα **ομόρροπα,** τα οποία έχουν την **ίδια φορά.**

    Παράδειγμα:
    Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
    είναι ομόρροπα.



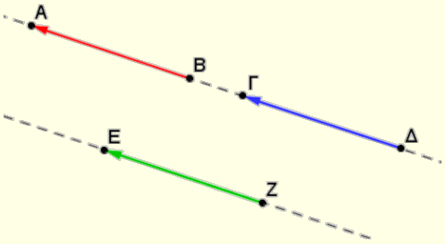
  - Τα **αντίρροπα,** τα οποία έχουν **αντίθετη φορά.**

    Παράδειγμα:
    Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
    είναι αντίρροπα.



- **Ίσα** είναι τα διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση (δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλη), την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
  Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο ίσα διανύσματα, τότε γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Παράδειγμα:
Στο σχήμα τα διανύσματα
έχουν όλα το ίδιο μέτρο.

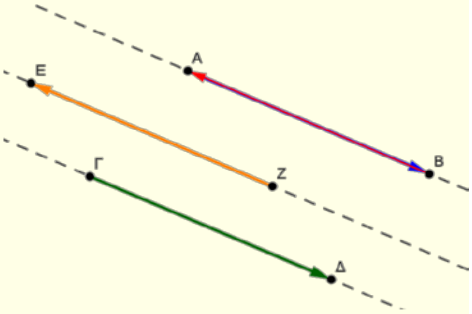


Ισχύει:

- *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{BA}$ *και* $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ *είναι ίσα, δηλαδή* $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{BA}$ *και* $\overrightarrow{ZE}$ *είναι ίσα, δηλαδή* $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ZE}$.

- **Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.

Παράδειγμα:
Στο σχήμα τα διανύσματα
έχουν όλα το ίδιο μέτρο.

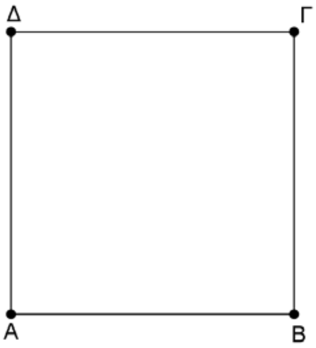


Ισχύει:

- *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{BA}$ *είναι αντίθετα, δηλαδή* $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{BA}$ *και* $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ *είναι αντίθετα, δηλαδή* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
- *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{ZE}$ *είναι αντίθετα, δηλαδή* $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{ZE}$.

Παραδείγματα

1. Δίνεται το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$.

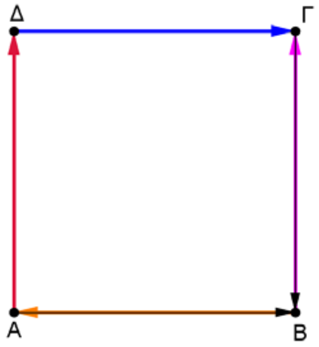


(α) Να γράψετε δύο διανύσματα τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο $Β$.

(β) Να γράψετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΓ}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:



(α) *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{ΒΑ}$ *και* $\overrightarrow{ΒΓ}$ *έχουν ως αρχή το σημείο* $Β$.

(β) *Το διάνυσμα* $\overrightarrow{ΑΒ}$ *είναι ίσο με το* $\overrightarrow{ΔΓ}$, *γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση ως απέναντι πλευρές τετραγώνου, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο ως πλευρές τετραγώνου.*

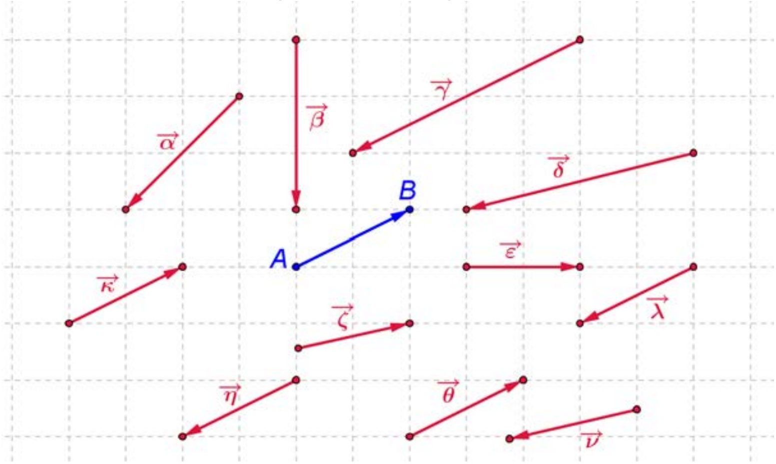
(γ) *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{ΓΒ}$ *και* $\overrightarrow{ΑΔ}$ *είναι αντίθετα, γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, δηλαδή είναι αντίρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο.*

Δραστηριότητες

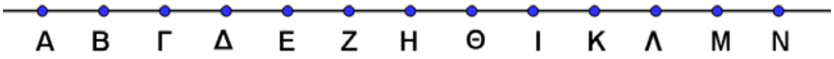
1. Ποια από τα πιο κάτω μεγέθη είναι διανυσματικά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Θερμοκρασία	(β) Ταχύτητα
(γ) Χρόνος	(δ) Μάζα
(ε) Εμβαδόν	(στ) Απόσταση
(ζ) Μετατόπιση	(η) Πλήθος λεμονιών σε ένα καλάθι

2. Να βρείτε διανύσματα:
   (α) που είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$
   (β) που είναι αντίθετα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$



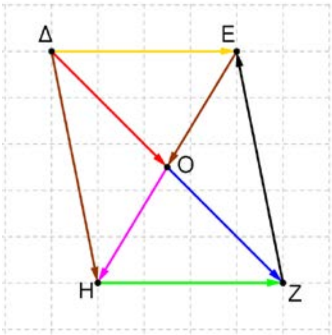
3. Στο σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm.



   (α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων: $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$, $\overrightarrow{\Delta \Theta}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{BZ}$, $\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{NI}$
   (β) Ποια από τα πιο πάνω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;
   (γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma E}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma E}$.

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

   Στο παραλληλόγραμμο ΔEZH τα διανύσματα:

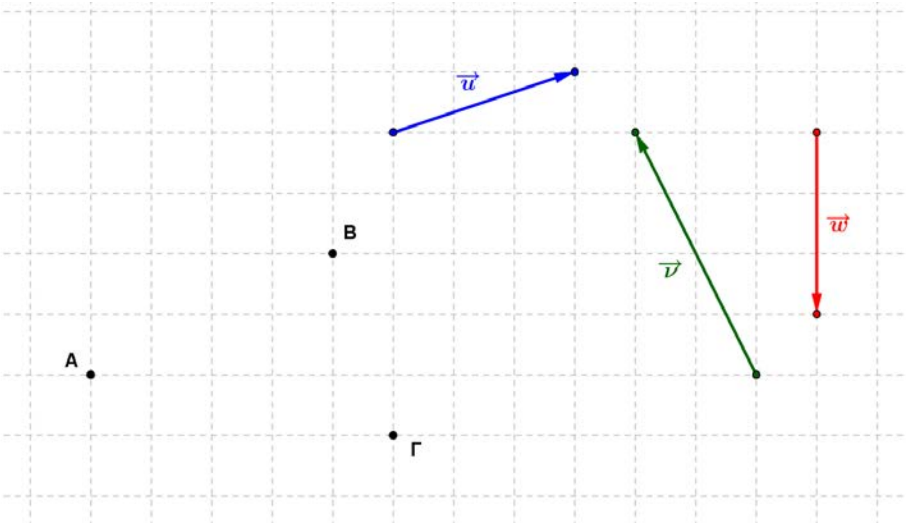


(α)	$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{HZ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\overrightarrow{\mathrm{EO}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\overrightarrow{\Delta H} = \overrightarrow{EZ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\overrightarrow{\Delta O} = -\overrightarrow{OE}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{EH}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

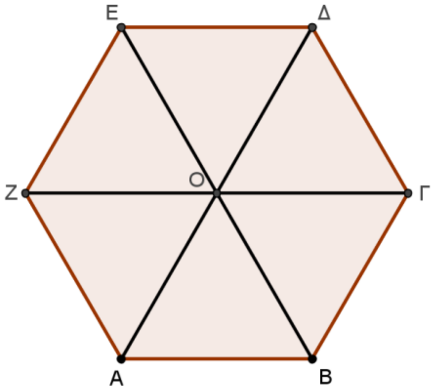
5. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 3$. Ο Αλέξης ισχυρίζεται ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

6. Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και N είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AM, να δείξετε ότι:
   (α) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$,
   (β) $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$

7. Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω σχήμα, ένα διάνυσμα που:
   (α) είναι ίσο με το $\vec{u}$ και αρχίζει από το A
   (β) είναι αντίθετο του $\vec{v}$ και αρχίζει από το B
   (γ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{w}$, χωρίς να είναι ίσο με το $\vec{w}$ και αρχίζει από το Γ



8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με όλες τις πλευρές ίσες με $2\,cm$ και τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν $Z\Gamma \parallel E\Delta$, $A\Delta \parallel ZE$, $EB \parallel \Delta\Gamma$, να γράψετε δύο διανύσματα που:
   (α) είναι ίσα
   (β) είναι αντίθετα
   (γ) είναι παράλληλα με το $\overrightarrow{B\Gamma}$
   (δ) είναι αντίρροπα με το $\overrightarrow{EZ}$
   (ε) έχουν μέτρο $4\,cm$



Πράξεις με Διανύσματα

Διερεύνηση

Δύο παιδιά έχουν δέσει ένα καροτσάκι με δύο σχοινιά, όπως φαίνεται στην εικόνα. Θα τραβήξουν ταυτόχρονα τα σχοινιά, για να το μετακινήσουν.

- ✓ Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το καροτσάκι;

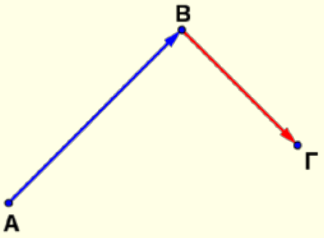
- ● *Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_3.1».*
- ● *Αφού επιλέξετε το εικονίδιο ▶, να παρακολουθήσετε την κίνηση του καροτσιού σε διαδοχικά βήματα.*

- ✓ Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού.

Μαθαίνω

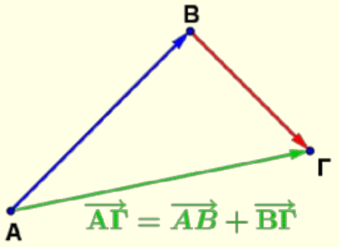
- Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά διανύσματα,** όταν το τέλος του πρώτου διανύσματος είναι η αρχή του δεύτερου.

  Παράδειγμα:
  Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι διαδοχικά.



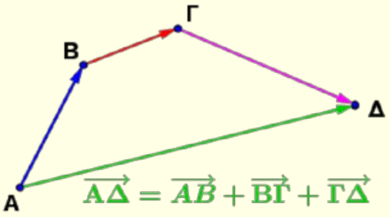
- **Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων** είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.

  Παράδειγμα:
  Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και γράφεται $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$.



- Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα, τα οποία είναι ανά δύο διαδοχικά, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε το άθροισμά τους έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου.

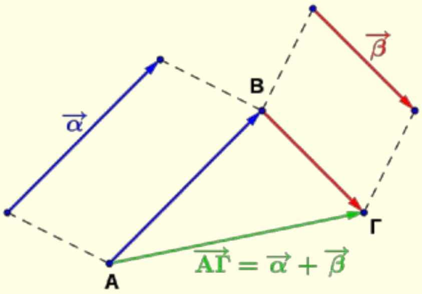
Παράδειγμα:
Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ και γράφεται:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$



- Για να προσθέσουμε δύο **μη διαδοχικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ τα οποία είναι διαδοχικά.

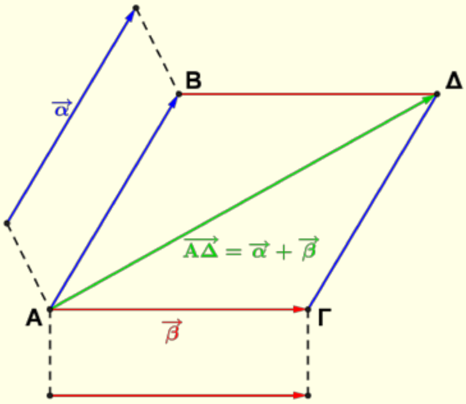
Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.



Σημείωση:
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη ***μέθοδο του παραλληλογράμμου*** *και εργαζόμαστε ως εξής:*

- *Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τα οποία έχουν κοινή αρχή.*
- *Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ.*
- *Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων, Α και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου, Δ, είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων.*

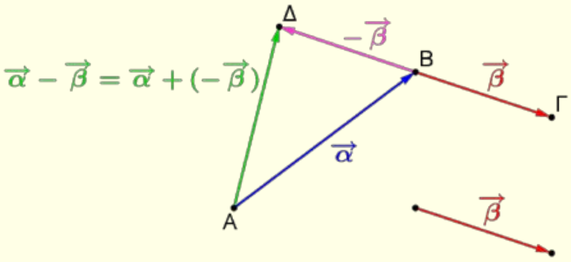


- **Διαφορά δύο διανυσμάτων**

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.

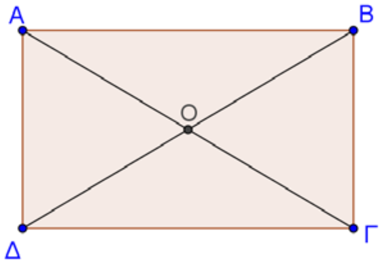
Δηλαδή,
$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.

Σημείωση:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$
$\vec{\alpha}+\overrightarrow{(-\alpha)}=\vec{\alpha}-\vec{\alpha}=\vec{0}$



Παραδείγματα

1. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι ίσο με:
   (α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$
   (β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}$
   (γ) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{O\Delta}$
   (δ) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{O\Delta}$
   (ε) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$



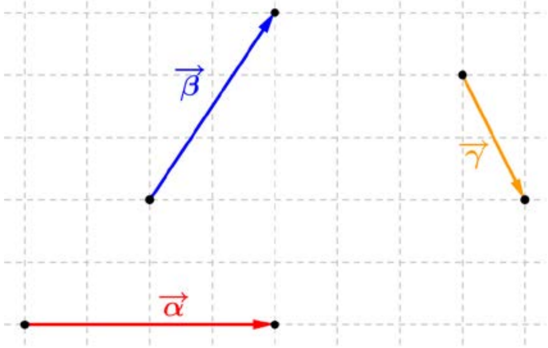
Λύση:

(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$
(β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
(γ) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{B\Delta}$

Μετατρέπουμε τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ σε άθροισμα με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.

(δ) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AO}+\left(-\overrightarrow{O\Delta}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$
(ε) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}$

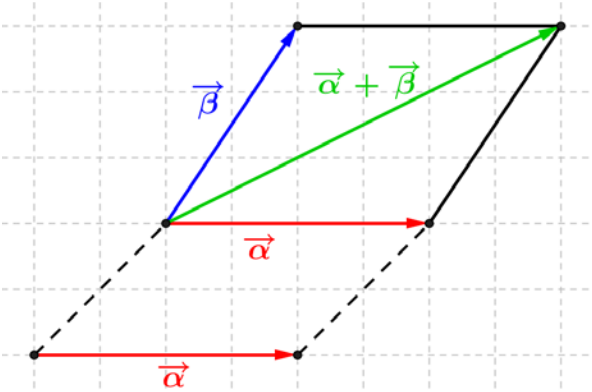
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα στο διπλανό σχήμα:
   (α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
   (β) $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$



Λύση:

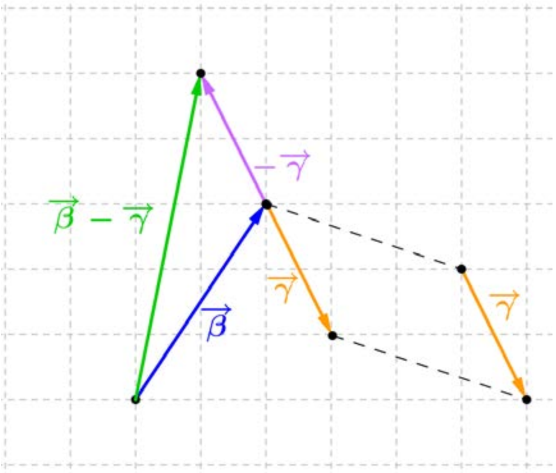
(α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι διαδοχικά.
Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ώστε να έχει κοινή αρχή με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου σχηματίζουμε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ το οποίο είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου.



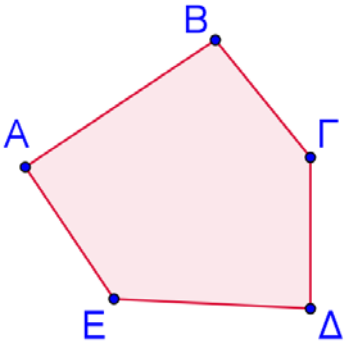
(β) Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ώστε να έχει αρχή το τέλος του διανύσματος $\vec{\beta}$. Στη συνέχεια σχηματίζουμε το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\gamma}$ ώστε να έχει κοινή αρχή με το $\vec{\gamma}$.

Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $-\vec{\gamma}$ είναι διαδοχικά, οπότε σχηματίζουμε το άθροισμα $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, το οποίο είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του διανύσματος $\vec{\beta}$ και τέλος το τέλος του $-\vec{\gamma}$.
Ισχύει: $\vec{\beta}+(-\vec{\gamma})=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$



Δραστηριότητες

1. Στο σχήμα δίνεται το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{E\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Στο σχήμα να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με:

(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$

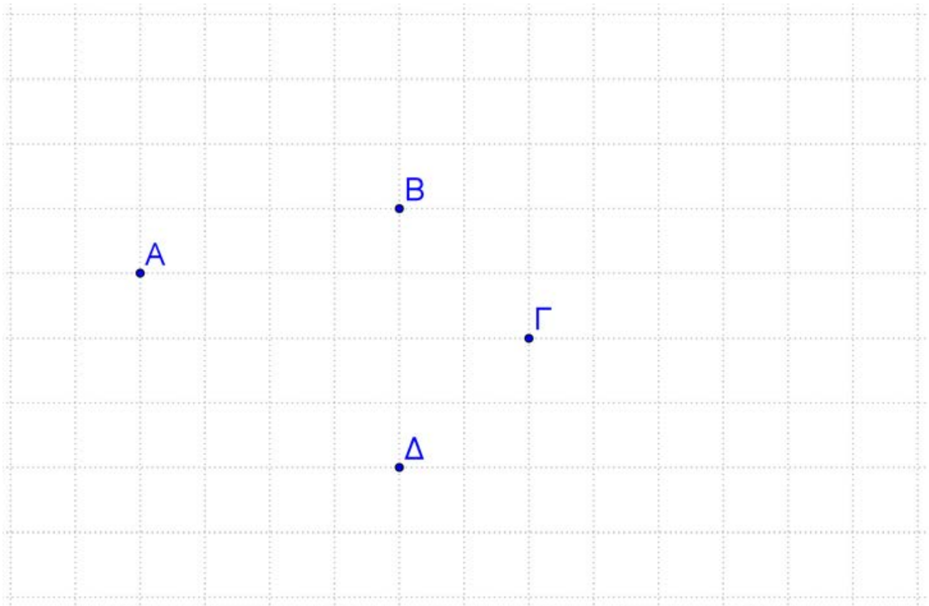
(β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}$

(γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

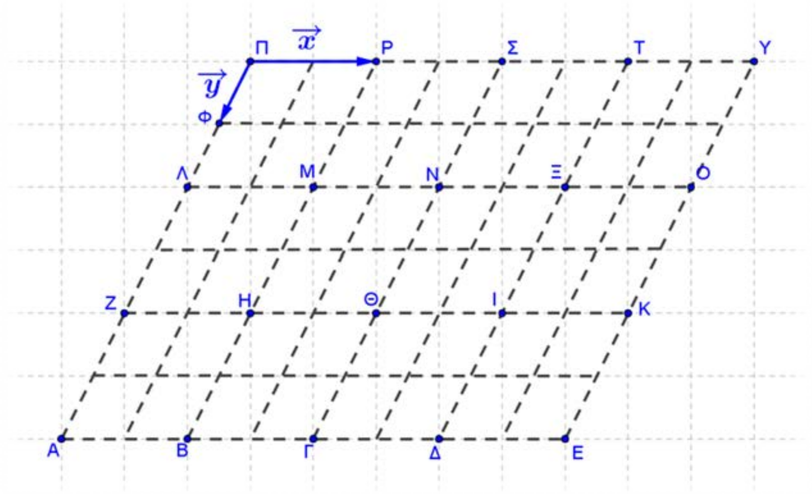
(δ) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$

(ε) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

(στ) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}$



3. Στο σχήμα δίνονται δύο διανύσματα $\overrightarrow{\Pi P} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{\Pi \Phi} = \vec{y}$.

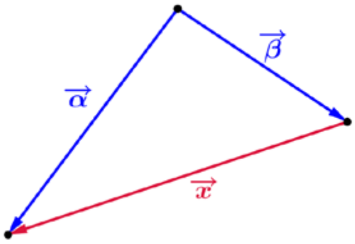


Να σχεδιάσετε στο πιο πάνω σχήμα τρία διαφορετικά διανύσματα που είναι ίσα με:

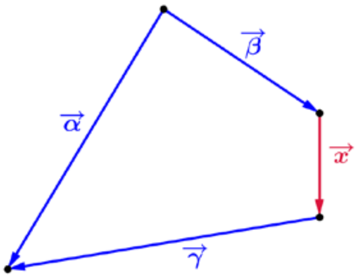
(α) $\vec{x} + \vec{y}$ (β) $\vec{x} - \vec{y}$ (γ) $\vec{y} - \vec{x}$

4. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως άθροισμα ή διαφορά των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

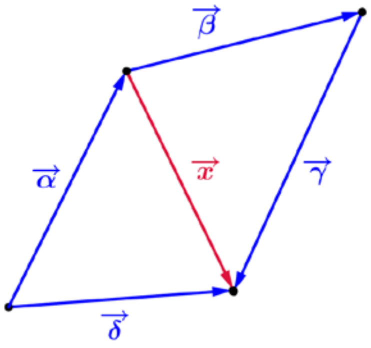
(α)



(β)

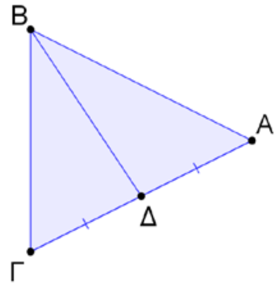


(γ)

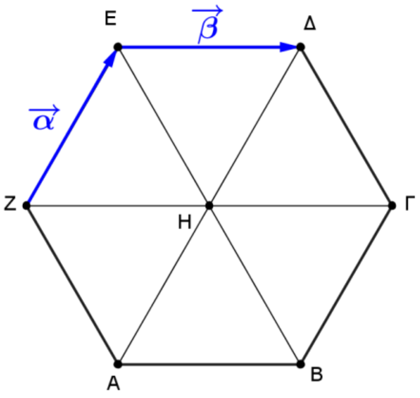


5. Να σχεδιάσετε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με:
   (α) $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΓΒ}$
   (β) $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΓΑ}$
   (γ) $\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΓ}$
   (δ) $\overrightarrow{ΓΑ}-\overrightarrow{ΓΒ}$

6. Στο διπλανό σχήμα η $ΒΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΒΑ}=2\overrightarrow{ΒΔ}$.



7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ με όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν $ΖΓ \parallel ΕΔ$, $ΑΔ \parallel ΖΕ$, $ΕΒ \parallel ΔΓ$ και $\overrightarrow{ΕΔ}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΖΕ}=\vec{\alpha}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.



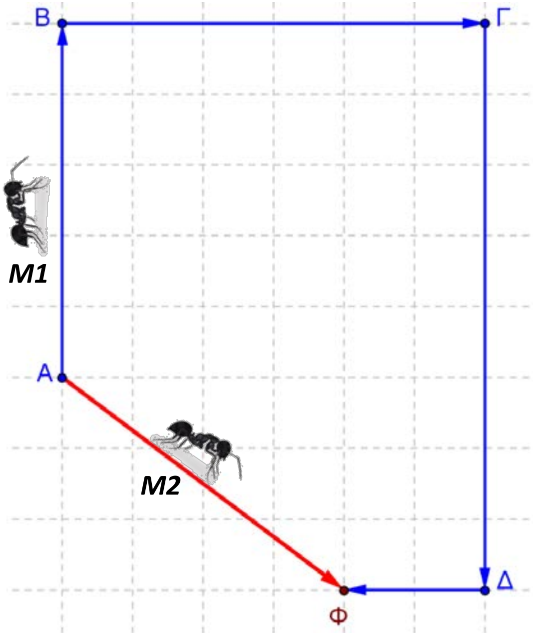
(α) $\overrightarrow{ΒΑ}$ (β) $\overrightarrow{ΖΓ}$ (γ) $\overrightarrow{ΗΔ}$ (δ) $\overrightarrow{ΕΗ}$
(ε) $\overrightarrow{ΔΓ}$ (στ) $\overrightarrow{ΒΕ}$ (ζ) $\overrightarrow{ΖΔ}$ (η) $\overrightarrow{ΓΑ}$

Δραστηριότητες Ενότητας

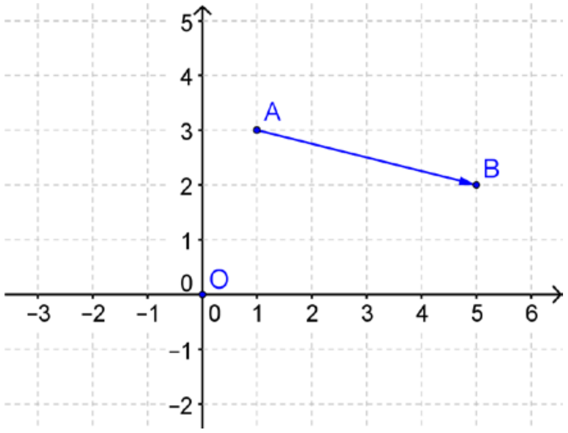
1. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις περιγράφει μονόμετρο και ποια διανυσματικό μέγεθος;
   (α) Ένα καρπούζι ζυγίζει 8 Kg
   (β) Το πλοίο κινείται με ταχύτητα 80 ναυτικά μίλια την ώρα νοτιοανατολικά του λιμανιού
   (γ) Η μοτοσυκλέτα μου μπορεί να τρέξει μέχρι 80 km/h
   (δ) Ο πυρετός μου έφθασε τους 39℃
   (ε) Η απόσταση του σπιτιού του Αντρέα, από το σχολείο του είναι 1,5 Km
   (στ) Το σπίτι του φίλου μου του Αντρέα, βρίσκεται 1,5 Km Δυτικά από το δικό μου
   (ζ) Κοιμήθηκα 4 ώρες χθες

Το ναυτικό μίλι (nm) είναι η μονάδα μέτρησης μήκους (απόστασης) που χρησιμοποιείται στη ναυτιλία.
Είναι ίσο με:
$1\ nm = 1852\ m$

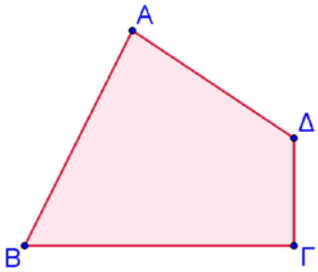
2. Ένα μυρμήγκι ($M1$) ξεκίνησε από ένα σημείο A, κάνοντας την εξής διαδρομή: Διάνυσε 5 cm βόρεια φθάνοντας στο σημείο B, 6 cm ανατολικά φθάνοντας στο σημείο Γ, 8 cm νότια φθάνοντας στο σημείο Δ και τέλος 2 cm δυτικά φτάνοντας στη φωλιά του Φ. Ένα δεύτερο μυρμήγκι ($M2$) ξεκίνησε από το σημείο A και πήγε νοτιοανατολικά στη φωλιά του στο σημείο Φ.
   (α) Πόση απόσταση διάνυσε συνολικά κάθε μυρμήγκι;
   (β) Πού βρίσκεται η φωλιά Φ των μυρμηγκιών ως προς το αρχικό σημείο A;
   (γ) Να αναφέρετε διαφορές και ομοιότητες των διαδρομών που ακολούθησαν τα δύο μυρμήγκια



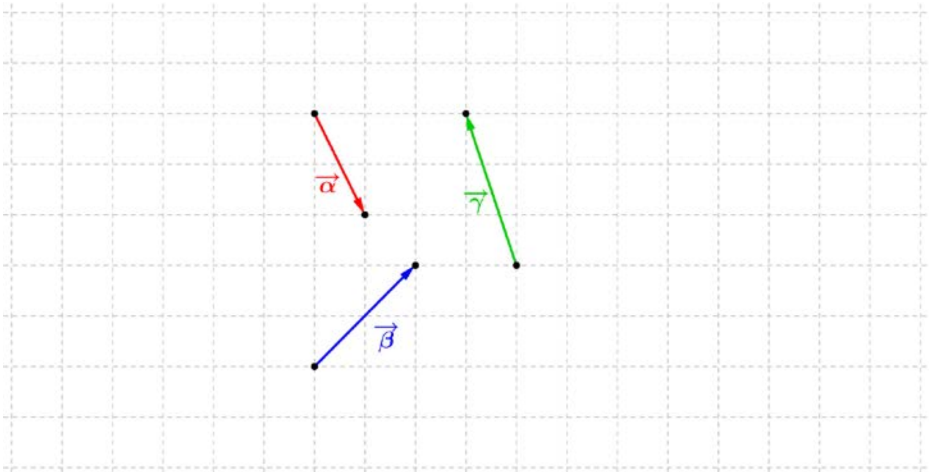
3. Στο σχήμα το σημείο Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



4. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΓΔ}$



5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.

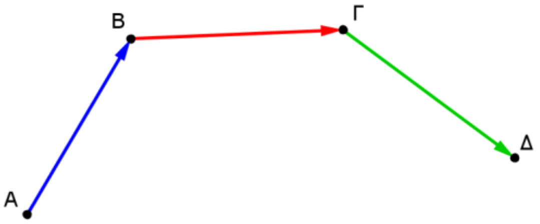


(α) Να υπολογίσετε το μέτρο των πιο πάνω διανυσμάτων.

(β) Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

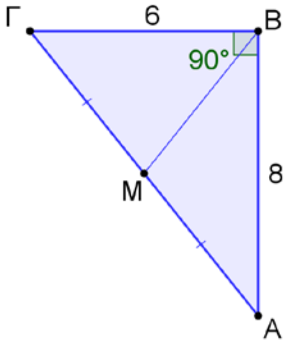
i. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
ii. $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$
iii. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
iv. $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$
v. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
vi. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$, όπως φαίνονται στο σχήμα.

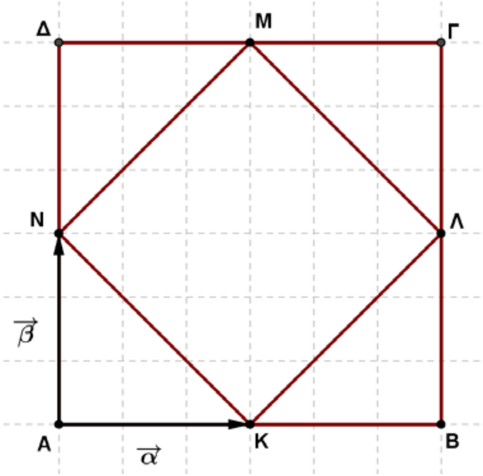


Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΔ}$, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων.

7. Στο διπλανό σχήμα η BM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.
   (α) Να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{MA}|$
   (β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{M\Gamma}$
   (γ) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{M\Gamma}$



8. Στο σχήμα δίνονται δύο τετράγωνα τα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$, όπου K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, A\Delta$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma M}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{M\Lambda}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δυο διανύσματα που έχουν αντίθετες φορές και την ίδια διεύθυνση έχουν άθροισμα ίσο με $\vec{0}$. Να βρείτε τρία διαδοχικά διανύσματα που να έχουν την ίδια διεύθυνση και άθροισμα ίσο με $\vec{0}$.

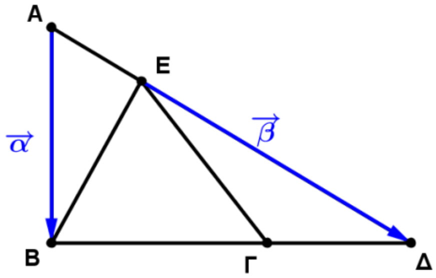
2. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση διανυσμάτων ($\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$).

3. Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει διεύθυνση και φορά προς τη δύση και ένα άλλο $\vec{\beta}$ προς την ανατολή. Να περιγράψετε τις πιθανές διευθύνσεις που μπορεί να έχει το άθροισμά τους.

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Delta$, με $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{3}{2}$, $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{1}{3}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{E\Delta}=\vec{\beta}$.

   (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

   (β) Να δείξετε ότι το $\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{1}{15}\left(6\vec{\alpha}+7\vec{\beta}\right)$.



ΕΝΟΤΗΤΑ

8

Συναρτήσεις

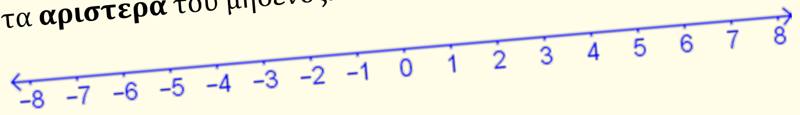
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τι είναι σύστημα αξόνων και να τοποθετούμε σημεία σε σύστημα αξόνων.
- Να κατανοούμε την έννοια της συνάρτησης και να επεξηγούμε τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου των τιμών εισόδου στις τιμές εξόδου.
- Να δημιουργούμε και να συμπληρώνουμε πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο μιας συνάρτησης.
- Να κατασκευάζουμε διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουμε συναρτήσεις, με ή χωρίς τεχνολογία.
- Να μοντελοποιούμε και να περιγράφουμε μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και να τα αναπαριστούμε σε πίνακα τιμών ή σε γραφική παράσταση.
- Να μεταφράζουμε από μια μορφή αναπαράστασης της συνάρτησης σε άλλη.

Έχουμε μάθει ...

Η δυνατότητα της διάταξης των ρητών αριθμών επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον πιο κάτω τρόπο:

- Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O της ευθείας που το λέμε **αρχή**, για να παραστήσουμε τον αριθμό 0.
- Δεξιά από το σημείο διαλέγουμε ένα άλλο σημείο A που παριστάνει τον αριθμό 1.
- Τότε με μονάδα μέτρησης το OA βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, ...
- Με παρόμοιο τρόπο τοποθετούμε τους αρνητικούς αριθμούς στα **αριστερά** του μηδενός.

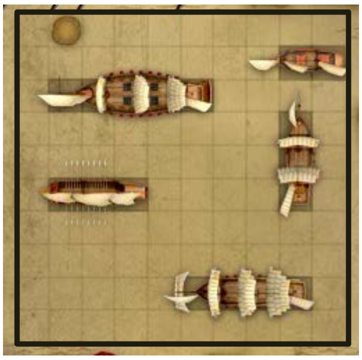


Συντεταγμένες Σημείου

Εξερεύνηση

Το παιχνίδι η Ναυμαχία, είναι ένα από τα πιο γνωστά και δημοφιλή επιτραπέζια και τώρα και ηλεκτρονικά παιχνίδια. Σε δύο ταμπλό 10 x 10 τετραγώνων τοποθετείται ο στόλος του κάθε παίκτη με τέτοιο τρόπο ώστε να μην είναι ορατός στον αντίπαλο. Στόχος είναι ο παίκτης να αναπτύξει τη στρατηγική του και να εξολοθρεύσει πρώτος τον στόλο του αντιπάλου!

Ο Σταύρος παίζει με έναν φίλο του Ναυμαχία. Έχει τοποθετήσει τον στόλο του όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

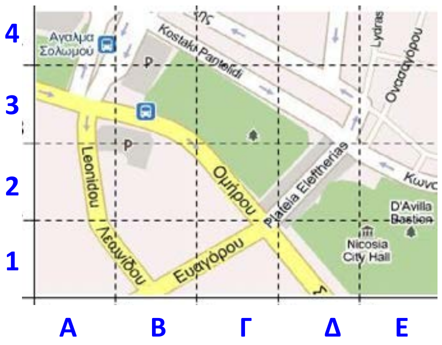


- ✓ Να περιγράψετε μία θέση την οποία πρέπει να στοχεύσει ο φίλος του για να βυθίσει ένα από τα πλοία του Σταύρου.
- ✓ Αν η πρώτη βολή του Σταύρου πέτυχε ένα από τα πλοία του αντιπάλου του, να εξηγήσετε πώς πρέπει να αποφασίζει για την αμέσως επόμενη κίνησή του, για να πετύχει ξανά το ίδιο πλοίο.

Στις πιο κάτω φωτογραφίες μπορείτε να δείτε την οθόνη που βλέπει ο Σταύρος κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Το παιχνίδι Ναυμαχία παίζεται από τη δεκαετία του 1930. Λέγεται ότι το παιχνίδι ξεκίνησε από τις φυλακές, όπου οι φυλακισμένοι φώναζαν από το ένα κελί στο άλλο τις συντεταγμένες του στόχου.

Διερεύνηση (1)



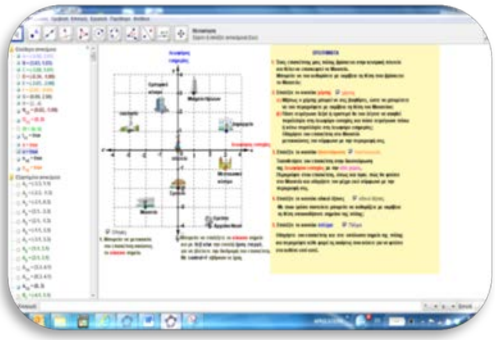
Να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα και τους αριθμούς στον χάρτη, για να σημειώσετε τη συμβολή των οδών Ομήρου και Ευαγόρου.

- ✓ Πώς θα μπορούσατε να περιγράψετε τη θέση του σταθμού αστικών λεωφορείων στο «Άγαλμα Σολωμού»;

- ✓ Ένας τουρίστας θέλει να επισκεφτεί το δημαρχείο Λευκωσίας (City Hall). Να σημειώσετε τη θέση του δημαρχείου Λευκωσίας στον χάρτη με τη βοήθεια των αριθμών και των γραμμάτων.

Διερεύνηση (2)

- ✓ Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En6_xartis.ggb»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες για να μετακινηθείτε στα διάφορα σημεία της πόλης. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

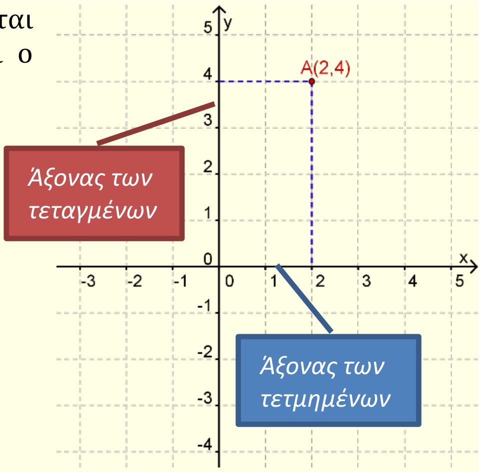


Αν έχει οριστεί πάνω στους άξονες η **ίδια μονάδα μέτρησης**, το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.

Μαθαίνω

- **Ορθογώνιο σύστημα αξόνων** ονομάζουμε δύο κάθετους αριθμημένους άξονες, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, με σημείο τομής τους το μηδέν του κάθε άξονα.

- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος **άξονας των τεταγμένων**.



- Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο μπορεί να οριστεί από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** αριθμών (x, y) που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου.

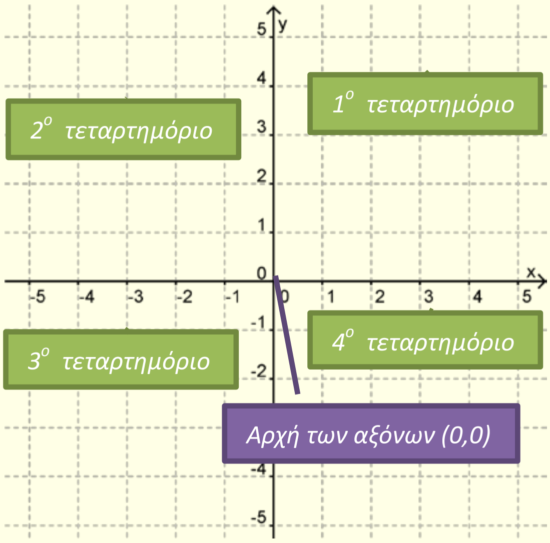
- Ο αριθμός x είναι η **τετμημένη** και ο αριθμός y είναι η **τεταγμένη.**

  Παράδειγμα:
  Στο πιο πάνω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι σημειωμένη η θέση του σημείου $A(2,4)$.
  Τετμημένη: 2 *Τεταγμένη:* 4

- Το σημείο τομής των αξόνων με συντεταγμένες (0,0) ονομάζεται **αρχή των αξόνων.**

- Ο άξονας των τετμημένων και ο άξονας των τεταγμένων χωρίζουν το επίπεδο των συνταγμένων σε 4 περιοχές που ονομάζονται **τεταρτημόρια.**

Το σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται και **καρτεσιανό**, από το όνομα του μαθηματικού Καρτέσιου Descartes.



- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και αντιστρόφως κάθε διατεταγμένο ζεύγος αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Παραδείγματα

1. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(4,1)$, $B(0,-3)$ και $\Gamma(-5,-2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να αναφέρετε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει κάθε σημείο.

Λύση:

Σημείο Α:

Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 4 μονάδες δεξιά και μετά μια μονάδα πάνω.

Το σημείο Α βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο.

Σημείο Β:

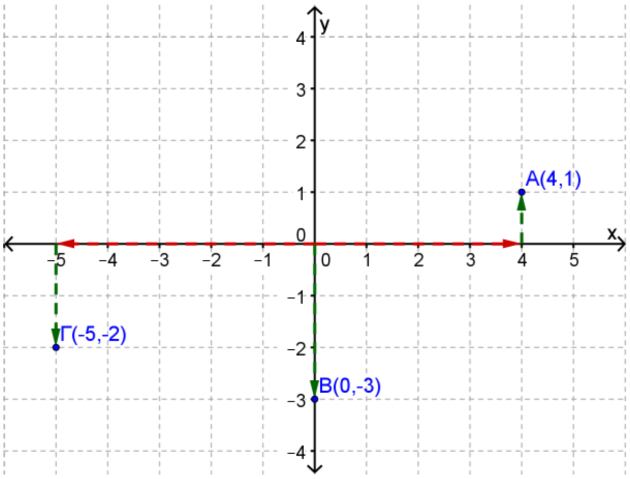
Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 3 μονάδες κάτω.

Το σημείο Β βρίσκεται πάνω στον άξονα των y.

Σημείο Γ:

Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 5 μονάδες αριστερά και μετά 2 μονάδες κάτω.

Το σημείο Γ βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο.



Δραστηριότητες

1. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να σημειώσετε τα σημεία:

$A(2,1)$, $B(1,2)$, $\Gamma(4,-2)$, $\Delta(-2,-1)$,

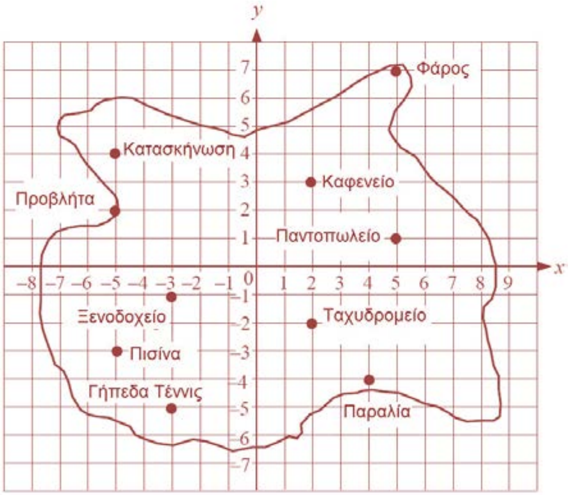
$E(4,0)$, $Z(-4,0)$, $H(0,4)$ $\Theta\left(-\frac{1}{2},2\right)$

2. Να γράψετε 5 διατεταγμένα ζεύγη αριθμών, των οποίων η τετμημένη είναι ίση με την τεταγμένη τους. Να τα τοποθετήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

3. Να δώσετε τις συντεταγμένες ενός σημείου που βρίσκεται:
   (α) πάνω στον άξονα των τετμημένων,
   (β) πάνω στον άξονα των τεταγμένων.

4. Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En6_syntetagmenes.ggb»* και να εντοπίσετε τη θέση του υποβρυχίου.

5. Ο χάρτης παρουσιάζει τις θέσεις συγκεκριμένων σημείων σε ένα μικρό νησάκι.
   (α) Να δώσετε τις συντεταγμένες της θέσης:
      i. της κατασκήνωσης,
      ii. του ξενοδοχείου,
      iii. της παραλίας,
      iv. της πισίνας,
      v. του καφενείου.
   (β) Να βρείτε τρία σημεία στον χάρτη που έχουν την ίδια τετμημένη.
   (γ) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στο $3^{ο}$ ή στο $4^{ο}$ τεταρτημόριο.



6. Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία $A(-2,5)$ και $B(6,5)$ και να βρείτε:
   (α) τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB,
   (β) σημείο Γ, έτσι ώστε το B να είναι το μέσο του $A\Gamma$.

7. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα, για να υποστηρίξετε την απόφασή σας.
   (α) *Η τεταγμένη ενός σημείου στο τέταρτο τεταρτημόριο είναι αρνητική.*
   (β) *Η τετμημένη ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στον άξονα των* x *είναι μηδέν.*
   (γ) *Το γινόμενο των συντεταγμένων στο τρίτο τεταρτημόριο είναι αρνητικό.*
   (δ) *Το άθροισμα της τετμημένης και της τεταγμένης ενός σημείου στο τρίτο τεταρτημόριο είναι θετικό.*

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να σχηματίσετε διατεταγμένα ζεύγη (πλευρά, περίμετρος) για κάθε σχήμα

Πλευρά (x)	1	2	3	4	5
Περίμετρος (y)					
Διατεταγμένο ζεύγος (x, y)					

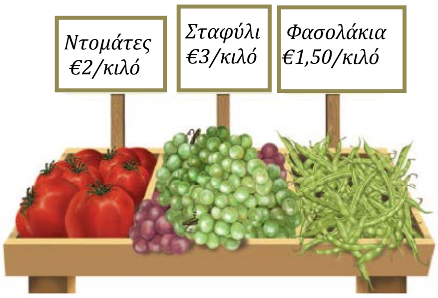
   (β) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη.
   (γ) Να ενώσετε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Τι παρατηρείτε;

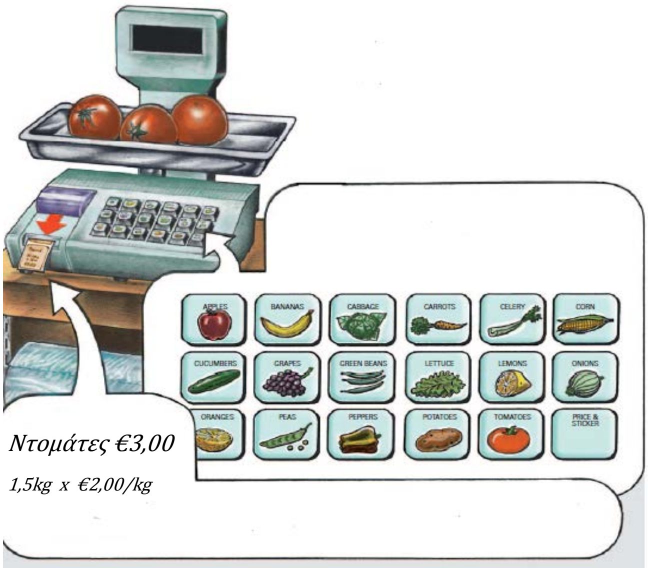
9. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να χρωματίσετε:
   (α) *με ΜΠΛΕ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι αρνητικό.*
   (β) *με ΚΟΚΚΙΝΟ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι θετικό.*
   (γ) *με ΠΡΑΣΙΝΟ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι μηδέν.*

Η έννοια της Αντιστοιχίας – Συνάρτησης

Εξερεύνηση

Ολόφρεσκα φρούτα και λαχανικά, αυστηρά επιλεγμένα από τους καλύτερους παραγωγούς, έρχονται καθημερινά στη φρουταρία μας, ενώ για τους καταναλωτές που αρέσκονται σε κάτι διαφορετικό και εξωτικό, υπάρχει πάντα μία μεγάλη ποικιλία επιλογών.





Ο υπάλληλος της φρουταρίας θέλει να οργανώσει τα προϊόντα που πωλεί η φρουταρία στην οθόνη αφής της ταμειακής μηχανής έτσι, ώστε να τον εξυπηρετούν καλύτερα.

- ✓ Ποιες οδηγίες πρέπει να δώσει στην εταιρεία που προγραμματίζει την ταμειακή μηχανή;

Ο υπάλληλος στη φρουταρία βάζει στη ζυγαριά το κάθε είδος λαχανικού, η μηχανή το ζυγίζει και πατώντας το πλήκτρο που αντιστοιχεί στο κάθε λαχανικό (προϊόν) γίνεται η χρέωση στην απόδειξη του πελάτη.

- ✓ Να ερμηνεύσετε πώς υπολογίζει η μηχανή το συνολικό κόστος για καθένα προϊόν που αγοράζει ο πελάτης.

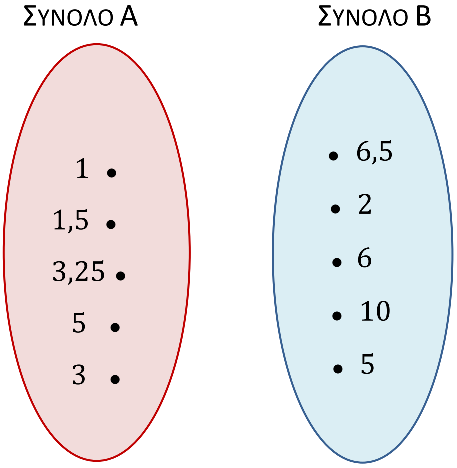
Απόδειξη
⋮
Ντομάτες €3,00
1,50 kg x €2,00/kg
⋮

Διερεύνηση (1)

- ✓ Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να δείχνει πόσο θα είναι το συνολικό κόστος που θα πληρώσουμε για x κιλά ντομάτες που πωλούνται προς €$2{,}00/kg$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Κιλά (x)	Συνολικό κόστος (y)
1	
2	
3	
⋮	
x	

- ✓ Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία του συνόλου A (κιλά ντομάτες) με τα στοιχεία του συνόλου B (κόστος).



- ✓ Να μελετήσετε τον πιο κάτω πίνακα, να βρείτε την τιμή των μανταρινιών και ακολούθως να συμπληρώσετε τις τιμές του πίνακα που λείπουν.

Μανταρίνια (kg)	5	2	3	⋯
Συνολικό κόστος (€)	10	⋯	6	18

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En6_michani_synartisis.ggb».*

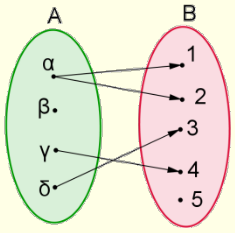
Δώσε την τιμή εισόδου -3

- ✓ Να επιλέξετε μία από τις 6 μηχανές. Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τις τιμές εισόδου (x) με τις τιμές εξόδου (y) για καθεμιά από τις μηχανές.
- ✓ Με βάση τον κανόνα που έχετε ορίσει, να εξετάσετε αν μπορείτε να αντιστοιχίσετε δύο στοιχεία του συνόλου των τιμών εισόδου με το ίδιο στοιχείο του συνόλου των τιμών εξόδου.
- ✓ Με βάση τον κανόνα που έχετε ορίσει, μπορείτε να αντιστοιχίσετε κάποιο στοιχείο του συνόλου των τιμών εισόδου με δύο στοιχεία του συνόλου των τιμών εξόδου;

Μαθαίνω

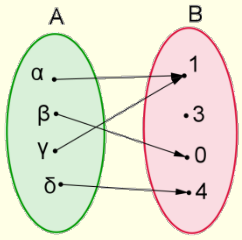
- **Αντιστοιχία** λέγεται μια σχέση (κανόνας) που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου A (σύνολο εισόδου) με τα στοιχεία ενός συνόλου B (σύνολο εξόδου).

  Παράδειγμα:



- **Συνάρτηση** ονομάζουμε την ειδική περίπτωση αντιστοιχίας που σε **κάθε** στοιχείο του συνόλου εισόδου A αντιστοιχεί **μόνο ένα** στοιχείο του συνόλου εξόδου B.

  Παράδειγμα:



- Αν τα στοιχεία του συνόλου των τιμών εισόδου (x) και τα στοιχεία του συνόλου των τιμών εξόδου (y) είναι αριθμοί και συνδέονται μεταξύ τους, μέσω μιας ισότητας στην οποία η τιμή του y εξαρτάται από την τιμή του x, τότε η ισότητα αυτή ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.

  Παραδείγματα:
  $y = 2x + 3$, $y = x^2 + 2x + 3$

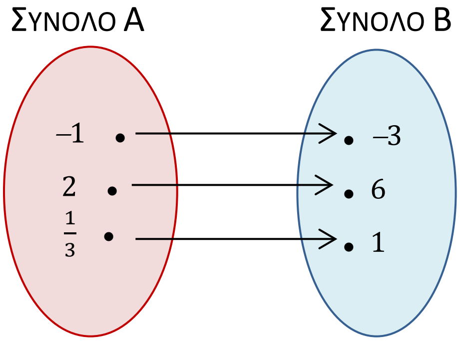
Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x + 4$. Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών, με τρεις οποιεσδήποτε τιμές εισόδου.

   Λύση:
   Ο τύπος της συνάρτησης είναι ο $y = x + 4$, δηλαδή προσθέτουμε 4 σε κάθε τιμή εισόδου, για να βρούμε την αντίστοιχη τιμή εξόδου.

Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-2	$-2 + 4 = +2$
1	$1 + 4 = 5$
4	$4 + 4 = 8$

2. Να βρείτε τον τύπο της πιο κάτω συνάρτησης:



   Λύση:
   Μελετούμε τη σχέση που έχουν τα στοιχεία του συνόλου A με τα αντίστοιχα στοιχεία του συνόλου B.

   Παρατηρούμε ότι οι τιμές των στοιχείων του συνόλου B είναι τριπλάσιες των αντίστοιχων τιμών των στοιχείων του συνόλου A. Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = 3x$.

Δραστηριότητες

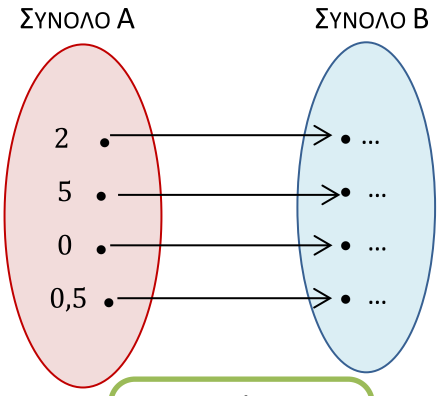
1. Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες:

Τύπος συνάρτησης: $y = x - 3$	
Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-2	…
0	…
2	…

Τύπος συνάρτησης: …………..	
Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-3	6
1	-2
4	-8

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις:

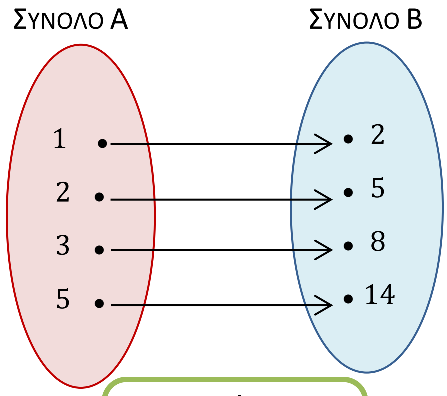
(α)



Κανόνας

«διπλασιάστε και προσθέστε τρία»

(β)

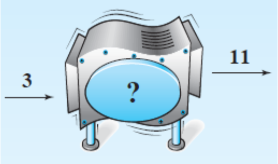


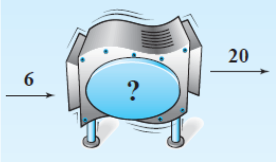
Κανόνας

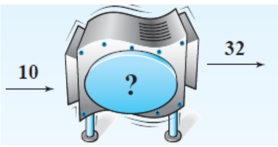
«…………………………

…………………………»

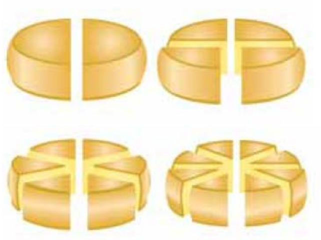
3. Να βρείτε έναν τύπο της συνάρτησης της μηχανής, μελετώντας τις τιμές εισόδου και τις τιμές εξόδου στις 4 διαφορετικές φάσεις που φαίνονται πιο κάτω.





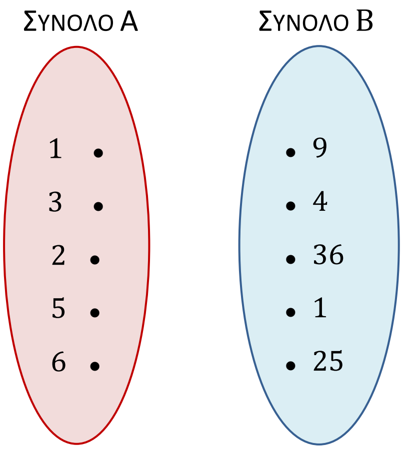


4. Σε μια συνάρτηση δίνονται οι τιμές εισόδου $-3, 0, 6$ και οι αντίστοιχες τιμές εξόδου $1, 4, 10$. Να βρείτε έναν τύπο της συνάρτησης.



5. Στο σχήμα βλέπουμε τον τρόπο που τεμαχίζεται ένα κεφαλοτύρι πριν από τη συσκευασία του. Συμβολίζουμε με τ τον αριθμό των τομών που κάνουμε κατά μήκος του κέντρου του κύκλου και με κ τον συνολικό αριθμό κομματιών τυριού που προκύπτουν κάθε φορά.
   (α) Να εκφράσετε τον αριθμό των κομματιών τυριού κ, σε σχέση με τον αριθμό των τομών τ.
   (β) Να υπολογίσετε πόσα κομμάτια τυριού θα πάρουμε αν κάνουμε 9 τομές.

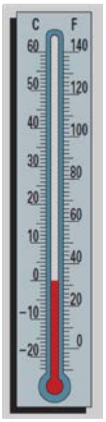
6. Να βρείτε έναν κανόνα αντιστοίχισης, ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου A να αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του συνόλου B.



Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Διερεύνηση (1)

Σε κάποιες χώρες (π.χ. Η.Π.Α.) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιείται η κλίμακα Φάρεναιτ (°F). Για τη μετατροπή της θερμοκρασίας από βαθμούς Κελσίου σε βαθμούς Φάρεναιτ, χρησιμοποιείται η συνάρτηση με τύπο: $y = \frac{9}{5}x + 32$, όπου x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου (°C) και y η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F).

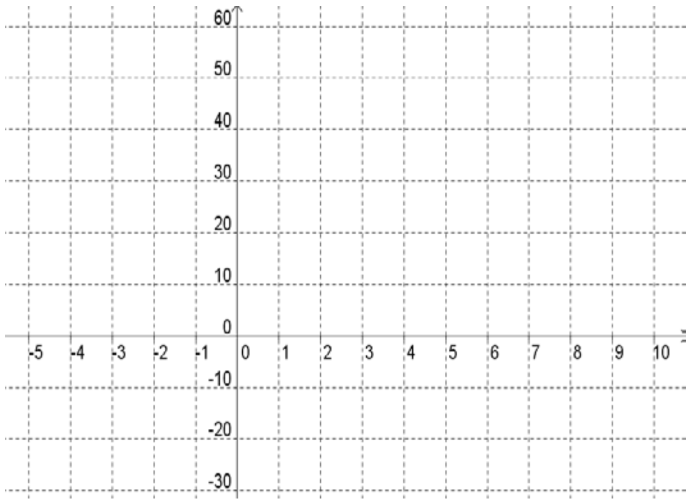


- ✓ Να εκτιμήσετε ποια είναι η θερμοκρασία στην κλίμακα Φαρενάιτ και στην κλίμακα Κελσίου στις πιο κάτω καταστάσεις που παρουσιάζονται στις φωτογραφίες:

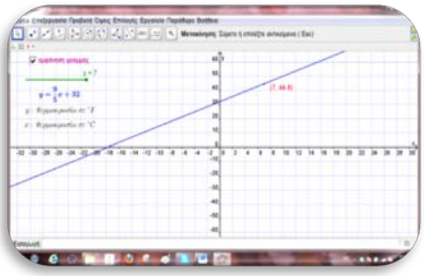



- ✓ Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης και να παραστήσετε τα διατεταγμένα ζεύγη στο σύστημα αξόνων:

x	-5	0	1	5	10
y					
(x,y)					



- ✓ Αν ενώσουμε τα σημεία τι είδους γραμμή σχηματίζεται;



Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En6_Synartisi.ggb»* και να προσθέσετε με τη βοήθεια του δρομέα και άλλα σημεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τι παρατηρείτε;

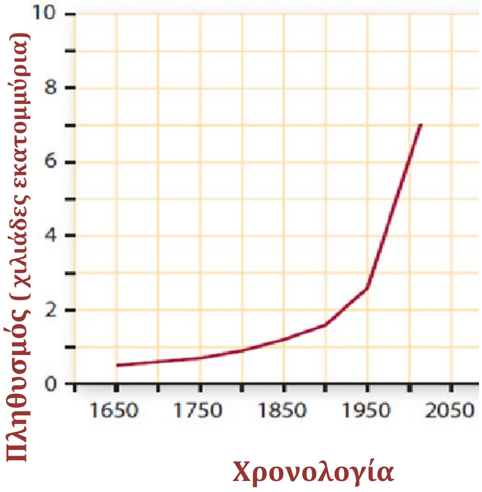
- ✓ Για ποια τιμή της κλίμακας Κελσίου η θερμοκρασία στην κλίμακα Φαρενάιτ είναι ίση με μηδέν;

- ✓ Να εξετάσετε αν το θερμόμετρο μπορεί να δείξει την ίδια ένδειξη και στις δύο κλίμακες.

Διερεύνηση (2)

Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τον πληθυσμό της γης σε χιλιάδες εκατομμύρια ανθρώπους για την περίοδο 1650 – 2010.

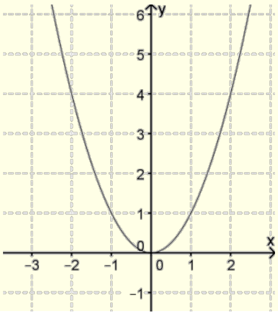
- ✓ Να υπολογίσετε τον πληθυσμό της γης το 2000;
- ✓ Πόσος περίπου ήταν ο πληθυσμός το 1960;
- ✓ Πότε ο πληθυσμός αναμένεται να φθάσει τα 8 000 000 000 κατοίκους;
- ✓ Σε ποια εκατονταετία σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;



Μαθαίνω

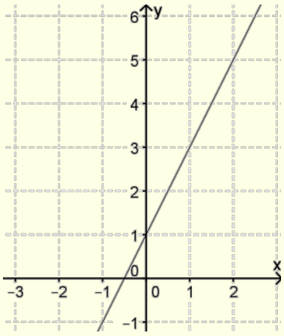
- Η αναπαράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών (x, y), που προκύπτουν μέσω του τύπου της συνάρτησης, ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.

  Παράδειγμα:
  Η γραφική παράσταση της $y = x^2$.



- Ειδικά τα σημεία που δημιουργούνται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = \alpha x + \beta$ ανήκουν σε μια **ευθεία γραμμή**.

Παράδειγμα:
Η γραφική παράσταση της $y = 2x + 1$.



Στην Α΄ Γυμνασίου όταν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, θα εννοείται ότι τόσο οι τιμές εισόδου όσο και οι τιμές εξόδου είναι αριθμοί.

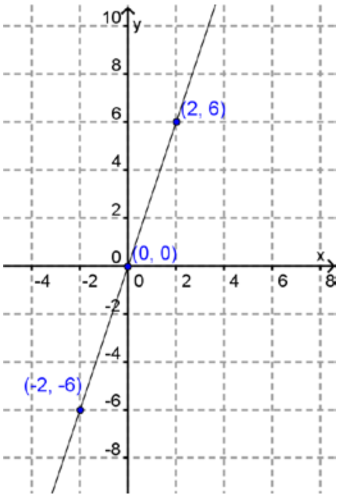
Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 3x$.
   (α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών. Ως τιμή εισόδου να χρησιμοποιήσετε τις τιμές του x και ως τιμή εξόδου τις αντίστοιχες τιμές του y.
   (β) Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση:

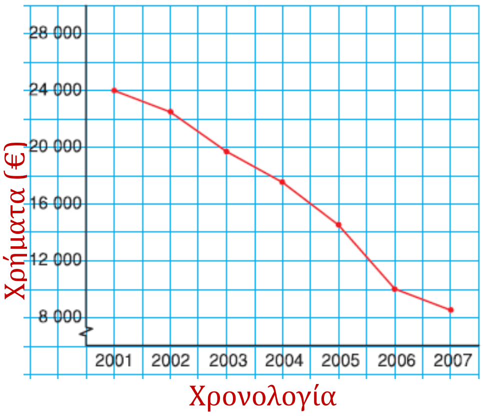
Τοποθετούμε τα σημεία στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και παρατηρούμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = 3x$ ανήκουν σε ευθεία.

Τιμή Εισόδου $\boldsymbol{x}$	Τύπος Συνάρτησης $\boldsymbol{3x}$	Τιμή Εξόδου $\boldsymbol{y}$	Διατεταγμένο Ζεύγος $\boldsymbol{(x, y)}$
-2	$3 \cdot (-2)$	-6	$(-2, -6)$
0	$3 \cdot (0)$	0	$(0,0)$
$\frac{1}{2}$	$3 \cdot (\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
2	$3 \cdot (2)$	6	$(2,6)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Τα **χρονογράμματα** είναι τα διαγράμματα τα οποία χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου και χρησιμοποιούνται ευρέως στη Στατιστική.

2. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μεταβολή της αξίας ενός αυτοκινήτου που αγοράσαμε το 2001.
   (α) Να βρείτε πόσο μειώθηκε η αξία του τα πρώτα δύο χρόνια.
   (β) Ποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο είχε τη μισή αξία αγοράς;
   (γ) Ποια χρονιά σημειώθηκε η μεγαλύτερη μείωση;



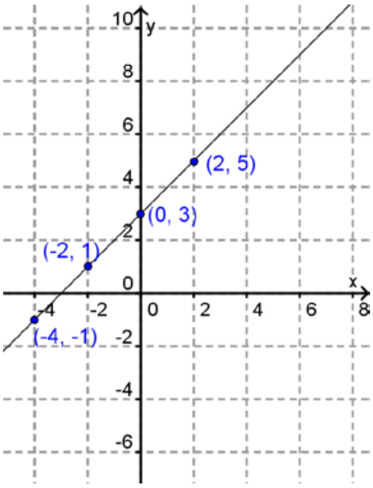
Λύση:

(α) *Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το* 2001 *η αξία του αυτοκινήτου ήταν* €24000 *ενώ το* 2003 *ήταν* €19750. *Άρα μειώθηκε* $24000 - 19750 = 4250$ *ευρώ.*

(β) *Το αυτοκίνητο είχε αξία* €12000 *στα μέσα του* 2005.

(γ) *Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η μεγαλύτερη μείωση σημειώθηκε μεταξύ του* 2005 *και του* 2006.

3. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που αναπαριστά.



Λύση:

Παρατηρούμε ότι η τιμή εξόδου (y) *είναι πάντοτε* 3 *μονάδες μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή εισόδου* (x). *Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης είναι* $y = x + 3$.

Τιμή Εισόδου x	Τιμή Εξόδου y	Διατεταγμένο Ζεύγος (x, y)
-4	-1	$(-4,-1)$
-2	1	$(-2,1)$
0	3	$(0,3)$
2	5	$(2,5)$
⋮	⋮	⋮

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 3x - 1$.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

Τιμή Εισόδου x	Τιμή Εξόδου y	Διατεταγμένα ζεύγη (x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

   (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
   (γ) Να κατασκευάσετε μια ευθεία που περνά από δύο σημεία που βρήκατε. Τι παρατηρείτε για τα υπόλοιπα σημεία;

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που υπολογίζει την περίμετρο (y) ενός τετραγώνου σε σχέση με το μήκος (x) της πλευράς του.
   (α) Να συμπληρώσετε πίνακα τιμών της συνάρτησης με τιμές εισόδου το μήκος των πλευρών τεσσάρων τετραγώνων.
   (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία που αντιστοιχούν στα πιο πάνω διατεταγμένα ζεύγη σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
   (γ) Τι είδους γραμμή θα προκύψει, αν ενώσετε τα σημεία που σημειώσατε;

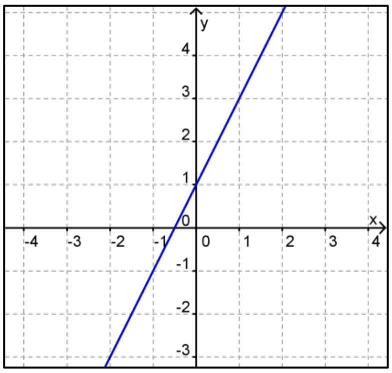
3. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στον πιο κάτω πίνακα τιμών.

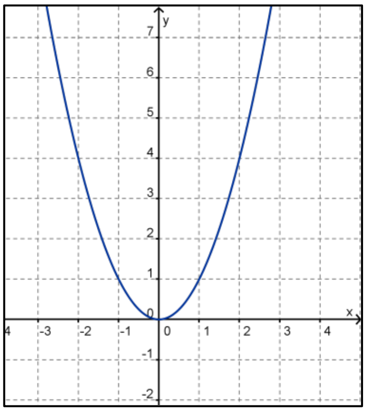
Τιμή εισόδου x	-2	-1	0	1	2	3
Τιμή εξόδου y	-8	-4	0	4	8	12

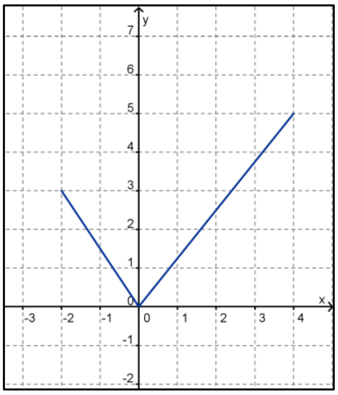
4. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται από τους πιο κάτω τύπους είναι ευθείες. Για κάθε συνάρτηση να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και να την παραστήσετε γραφικά.
   (α) $y = 2x$ (β) $y = 2x + 3$
   (γ) $y = x + 1$ (δ) $y = -3x$

5. Σε ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις ανήκουν τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) του διπλανού πίνακα τιμών;

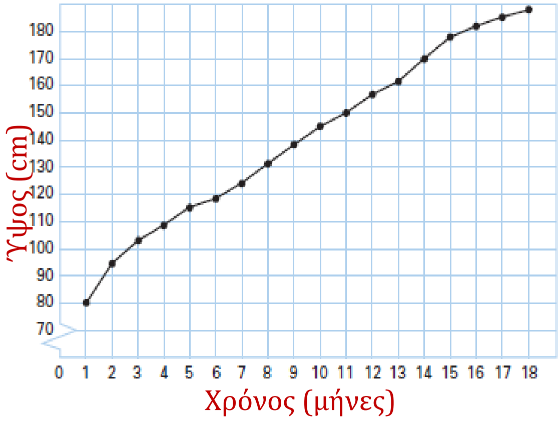
x	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1







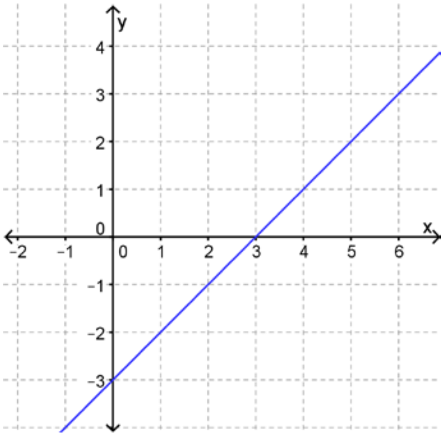
6. Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται το ύψος (σε cm) ενός φυτού για μια περίοδο 18 μηνών. Οι μετρήσεις γίνονται στο τέλος του κάθε μήνα. Να βρείτε:



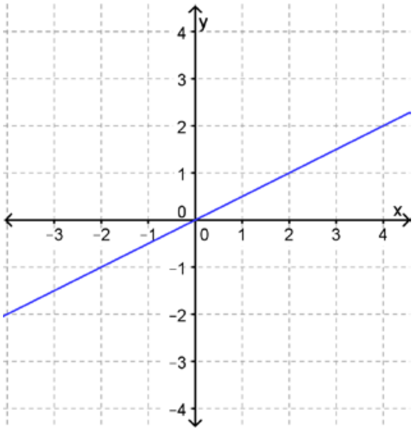
(α) Πόσο ύψος είχε στο τέλος του $7ου$ μήνα;
(β) Σε τι ύψος έφτασε το φυτό;
(γ) Πότε το φυτό είχε ύψος 170 cm;
(δ) Ποιο μήνα το φυτό είχε τη μεγαλύτερη αύξηση σε ύψος;

7. Για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις να κατασκευάσετε πίνακα αντίστοιχων τιμών και να βρείτε τον τύπο της.

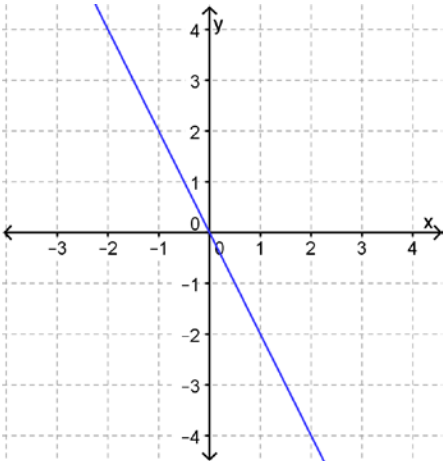
(α)



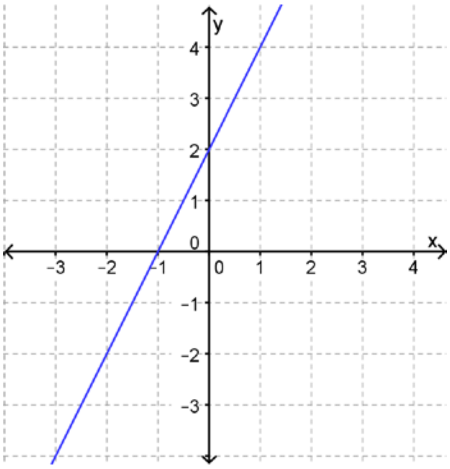
(β)



(γ)

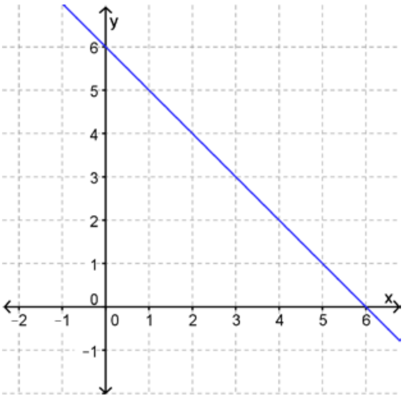


(δ)



8. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Η διπλανή γραφική παράσταση αναπαριστά:



Α. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν γινόμενο 6.*

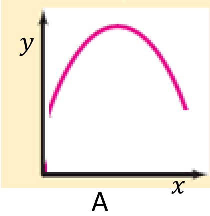
Β. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν άθροισμα 6.*

Γ. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν πηλίκο 6.*

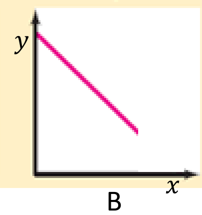
Δ. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν διαφορά 6.*

Ε. *Κανένα από τα πιο πάνω.*

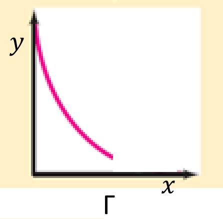
9. Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν την τιμή πώλησης ενός λίτρου βενζίνης (y) σε σχέση με τον χρόνο (x). Να αντιστοιχίσετε την κάθε γραφική παράσταση με την αντίστοιχη λεκτική έκφραση.



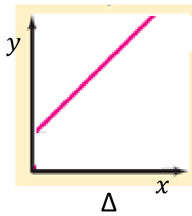
Α



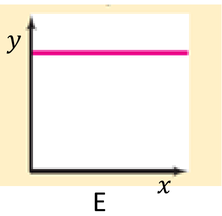
Β



Γ



Δ



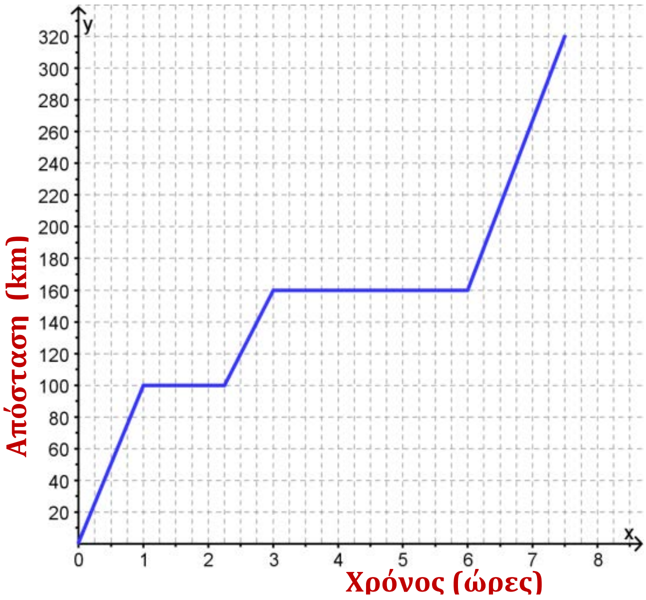
Ε

(α) *Η τιμή της βενζίνης αυξανόταν συνεχώς στην πάροδο του χρόνου.*

(β) *Η τιμή της βενζίνης έμεινε σταθερή στην πάροδο του χρόνου.*

(γ) *Η τιμή της βενζίνης αυξήθηκε για ένα διάστημα και ακολούθως μειώθηκε.*

10. Η οικογένεια του κυρίου Γιάννη πραγματοποίησε την Κυριακή μια εκδρομή. Ταξίδεψαν με αυτοκίνητο από τη Λευκωσία στην Πάφο, για να δούνε τους παππούδες τους. Στον δρόμο για την Πάφο έκαναν μια στάση στη Λεμεσό. Το απόγευμα επέστρεψαν πάλι στη Λευκωσία. Η γραφική παράσταση της απόστασης που διήνυσαν σε σχέση με τον χρόνο έχει καταγραφεί στο διπλανό διάγραμμα.



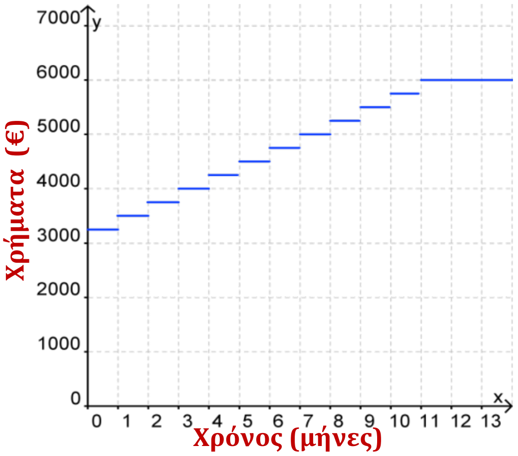
(α) Πόσο απέχει το σπίτι του παππού από το σπίτι τους;

(β) Πόσα km ήταν όλη η διαδρομή;

(γ) Πότε έγιναν στάσεις και πόση χρονική διάρκεια είχαν;

11. Η Εβελίνα σπουδάζει βρεφονηπιοκόμος. Για να αποκτήσει πείρα, αλλά και για να κερδίσει επιπλέον λεφτά για τα έξοδά της, άρχισε να δουλεύει τις ελεύθερες ώρες της προσέχοντας τα παιδιά μιας οικογένειας. Για κάθε ώρα που εργάζεται αμείβεται €8. Για κάθε μήνα παίρνει επιπλέον €40 για τις μετακινήσεις της.
    (α) Αν τον Μάρτη δούλεψε 30 ώρες, πόσα χρήματα πήρε;
    (β) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που συνδέει ώρες εργασίας και μηνιαία αμοιβή.
    (γ) Πόσες ώρες δούλεψε τον Απρίλη, αν πήρε €240;

12. Ο κύριος Νικόλας έχει ανοίξει έναν λογαριασμό στην τράπεζα στον οποίο κατέθεσε €3000. Έχει υπογράψει τραπεζική εντολή για να κατατίθεται στην αρχή κάθε μήνα ένα σταθερό ποσό. Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση και να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
    (α) Πόση είναι η μηνιαία δόση του;
    (β) Πόσα χρήματα θα έχει ο λογαριασμός στο τέλος του $10^{ου}$μήνα;
    (γ) Για πόσους μήνες ίσχυε η εντολή;



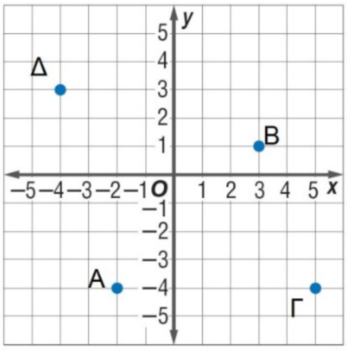
13. Ο Ιάσονας ζυγίζει $100\,kg$. Ο διαιτολόγος του, τού είπε ότι με βάση το ύψος του και την ηλικία του, θα έπρεπε να ήταν $80\,kg$. Έχουν βάλει στόχο, με τον γυμναστή και τον διαιτολόγο του, να ακολουθήσει ένα πρόγραμμα για τους επόμενους μήνες, ώστε να χάνει $2\,kg$ τον μήνα μέχρι να φτάσει στο ιδανικό του βάρος.

    (α) Να γράψετε τη σχέση που εκφράζει τη μάζα (σε κιλά) που στοχεύει να έχει κάθε μήνα σε σχέση με τον χρόνο (σε μήνες).
    (β) Να συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών και να τοποθετήσετε τα διατεταγμένα ζεύγη σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.
    (γ) Σε πόσους μήνες αναμένει να φθάσει στα $80\,kg$ που είναι ο στόχος του;
    (δ) Σε 6 μήνες φθάνει καλοκαίρι, πόσο βάρος θα έχει τότε αν ακολουθήσει πιστά τη δίαιτα;

Δραστηριότητες Ενότητας

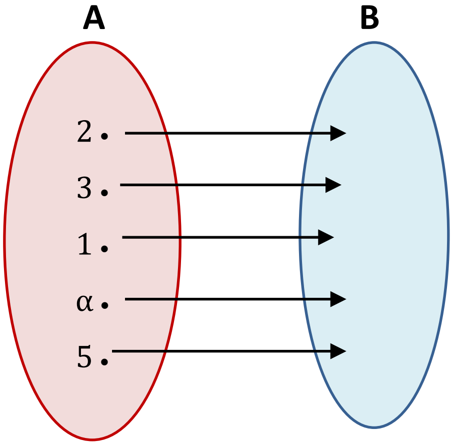
1. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(-3,-2)$, $B(-3,6)$, $\Gamma(5,6)$ και $\Delta(5,-2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να ενώσετε τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα και να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που προκύπτει.

2. Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ που είναι σημειωμένα στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα.

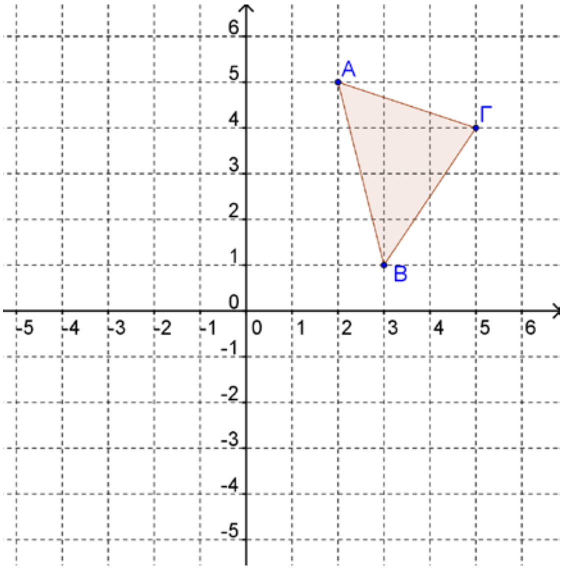


3. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιών που παραδίδει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 λίτρα λάδι.
   (α) Πόσα λίτρα λάδι θα πάρει από την παράδοση 500 κιλών ελιών στο ελαιοτριβείο;
   (β) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παραδώσει, ώστε να πάρει 250 λίτρα λάδι;
   (γ) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που συνδέει την ποσότητα ελιών που παραδίδονται στο ελαιοτριβείο (σε κιλά) με την παραγωγή λαδιού.

4. Συμβολίζουμε με x το μήκος της ακμής ενός κύβου και με y τον όγκο του. Το σύνολο A περιέχει τις τιμές του x και το σύνολο B τις αντίστοιχες τιμές του y. Να συμπληρώσετε την αντιστοιχία, αν ο όγκος δίνεται από τη σχέση $y = x^3$:



5. Στο πιο κάτω σύστημα συντεταγμένων είναι σημειωμένο το τρίγωνο $AB\Gamma$.
   (α) Να βρείτε τα διατεταγμένη ζεύγη, που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.
   (β) Να πολλαπλασιάσετε τόσο την τετμημένη όσο και την τεταγμένη της κάθε κορυφής του $AB\Gamma$ με -1 και να ονομάσετε τα νέα διατεταγμένα ζεύγη που θα προκύψουν, A', B' και Γ', αντίστοιχα.
   (γ) Να τοποθετήσετε τα νέα σημεία A', B' και Γ' στο σύστημα συντεταγμένων. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$;
   (δ) Να πολλαπλασιάσετε με -2 μόνο την τεταγμένη της κάθε κορυφής του $AB\Gamma$. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το νέο τρίγωνο που παράγεται;



6. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + 2$. Ποιος πίνακας τιμών περιέχει διατεταγμένα ζεύγη που αντιστοιχούν στην πιο πάνω ευθεία;

(α)

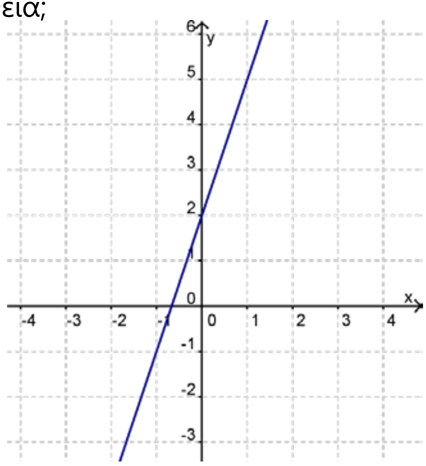
x	-1	0	2	3
y	-5	-2	4	7

(β)

x	-6	-3	0	3
y	0	-1	2	3

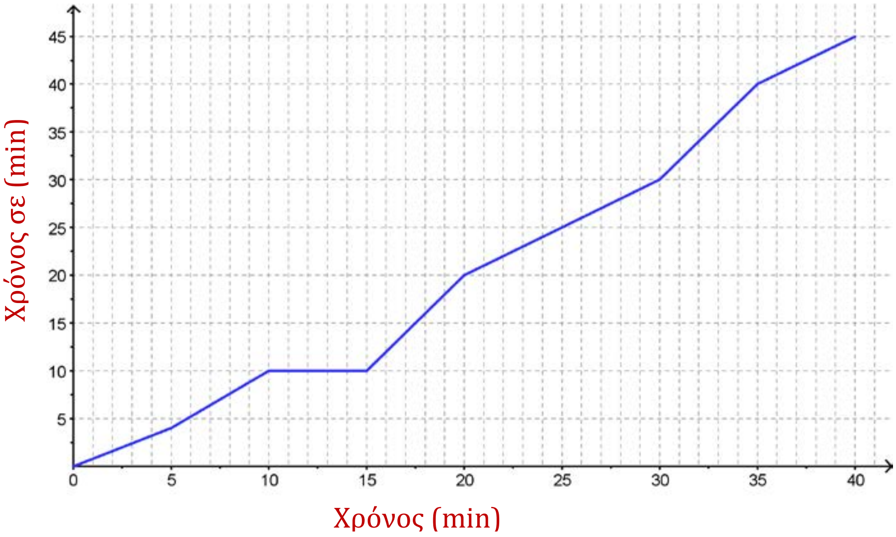
(γ)

x	-3	-1	1	2
y	-7	-1	5	8



7. Η Έλενα παίρνει €4 την ημέρα από τους γονείς της για το φαγητό της και για το λεωφορείο.
   (α) Να γράψετε μια σχέση που να υπολογίζει το συνολικό ποσό (y) που θα πάρει η Έλενα ύστερα από x ημέρες.
   (β) Να γράψετε τα διατεταγμένα ζεύγη (ημέρες, συνολικό ποσό), για $0, 1, 2$ και 3 ημέρες.
   (γ) Να τοποθετήσετε τα σημεία σε σύστημα αξόνων. Ποια σχέση συνδέει τα σημεία; Τι παρατηρείτε;

8. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την απόσταση σε (km) που διήνυσε ένα αυτοκίνητο σε χρόνο 40 λεπτών. Να βρείτε πότε το αυτοκίνητο παρέμεινε ακίνητο;



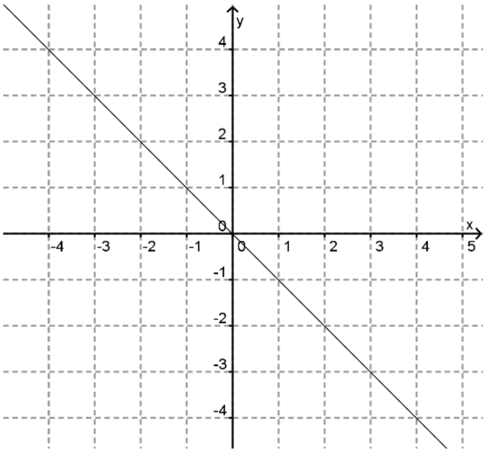
9. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης που φαίνεται στην πιο κάτω γραφική παράσταση;

   (α) $y = -x$

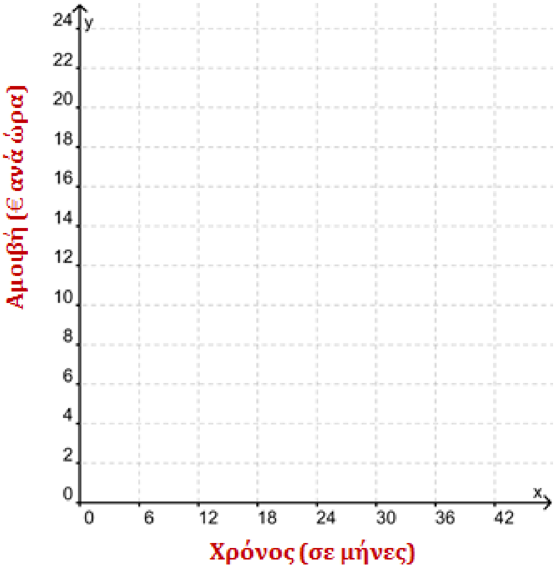
   (β) $y = x$

   (γ) $y = x - 1$

   (δ) $y = x - 2$



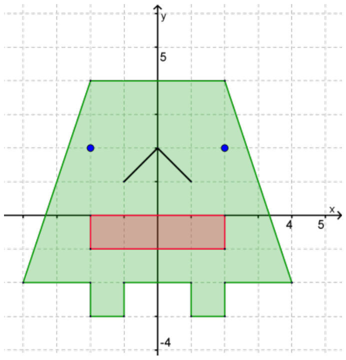
10. Ο Μενέλαος έχει προσληφθεί σε μια εταιρεία με συμβόλαιο απασχόλησης για 3 χρόνια. Το συμβόλαιο εργασίας του προνοεί αμοιβή €8 την ώρα. Μετά τους 6 μήνες προνοείται αύξηση €2 την ώρα, ενώ μετά από $1\frac{1}{2}$ χρόνο, ο μισθός του θα είναι €15 την ώρα για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αμοιβής (€ ανά ώρα) σε σχέση με τον χρόνο (μήνες).



11. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος €200 τον ένα. Επίσης, το εργοστάσιο πληρώνει €100 την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Να εκφράσετε το συνολικό ημερίσιο κόστος (y) του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού x των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει το εργοστάσιο σε μια μέρα.

12. Μια τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει με πάγιο €5 τον μήνα και 2 σεντ το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.
   (α) Να βρείτε το συνολικό κόστος y που χρεώνει η εταιρεία ως συνάρτηση των λεπτών x τηλεφωνικής κλήσης στη μορφή $y = ax + \beta$.
   (β) Αν κάποιος χρεώθηκε €13 για ένα μήνα πόσα λεπτά μίλησε στο τηλέφωνο συνολικά;

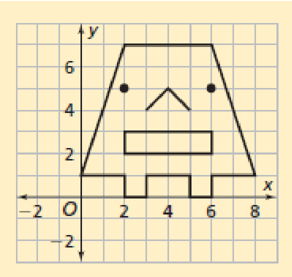
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού



1. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων ο Αντώνης έχει σχεδιάσει μια φιγούρα.
   (α) Να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω σημείων και ακολούθως να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Κορυφές	(x,y)	$(2x,2y)$
Μάτια		
Μύτη		
Στόμα		

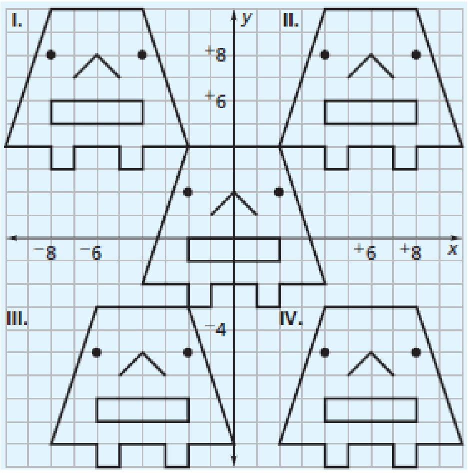
   (β) Να εξετάσετε πώς έχουμε μεταβάλει τις συντεταγμένες, ώστε η φιγούρα να εμφανιστεί όπως φαίνεται δίπλα.



   (γ) Μπορείτε να προβλέψετε πώς θα είναι το γράφημα αν τριπλασιάσω τις συντεταγμένες κάθε σημείου; Δηλαδή, $(x,y) \rightarrow (3x,3y)$;
   (δ) Να εξετάσετε πως θα είναι η τελική φιγούρα αν μεταβάλω τις συντεταγμένες του κάθε σημείου ως εξής:

$$(x,y) \rightarrow (-x,y) \qquad (x,y) \rightarrow (x,-y) \qquad (x,y) \rightarrow (x,y-1)$$

   (ε) Να εξετάσετε ποια μεταβολή πρέπει να γίνει στο σύνολο των συντεταγμένων για να προκύψουν οι διπλανές αλλαγές στη θέση της φιγούρας.



2. Ένας δύτης, για να μην προσβληθεί από τη νόσο των δυτών, κατά τη διάρκεια της ανάδυσης στην επιφάνεια της θάλασσας, θα πρέπει να ανεβεί ομαλά, έτσι ώστε να αποφύγει την απότομη αλλαγή της πίεσης.

Βάθος d (m)	Χρόνος t (s)
2,3	15
4,6	30
6,9	45
9,2	60

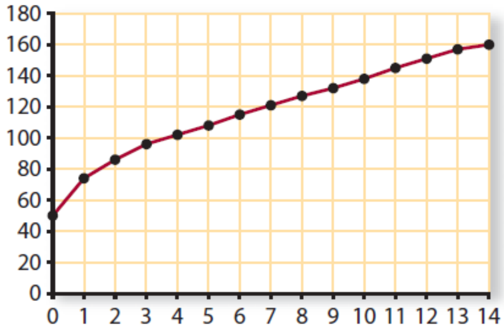
Στον πίνακα δίνεται ο χρόνος που χρειάζεται ένας δύτης για να ανεβεί στην επιφάνεια της θάλασσας ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται.

(α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που να συνδέει τον χρόνο ανάδυσης με το βάθος στο οποίο βρίσκεται ένας δύτης.

(β) Αν ένας δύτης βρίσκεται σε βάθος $13{,}8\, m$ κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, να υπολογίσετε τον χρόνο που θα χρειαστεί για να αναδυθεί.

3. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει το μέσο ύψος σε σχέση με την ηλικία των κοριτσιών.

Ύψος κοριτσιών

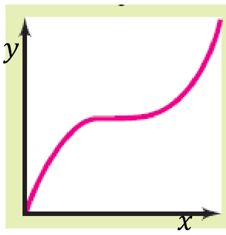


(α) Σε ποια χρονική περίοδο τα κορίτσια ψηλώνουν περισσότερο;

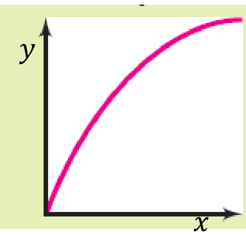
(β) Να εξετάσετε πώς αλλάζει το ύψος κατά τη χρονική περίοδο που τα κορίτσια φοιτούν στο γυμνάσιο.

(γ) Πώς πιστεύετε ότι θα είναι η γραφική παράσταση του ύψους σε σχέση με την ηλικία των κοριτσιών μέχρι την ηλικία των 25 χρονών.

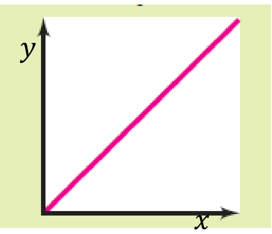
4. Η Αννίτα θα πάει στο σπίτι της συμμαθήτριάς της για να διαβάσουν μαζί. Να αντιστοιχίσετε το καθένα από τα πιο κάτω σενάρια με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της απόστασης (y) που καλύπτει σε σχέση με τον χρόνο (x).



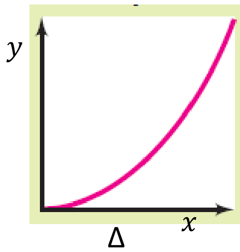
Α



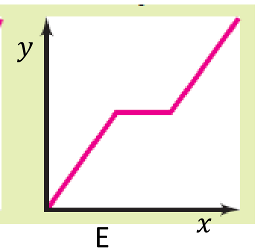
Β



Γ



Δ



Ε

Η Αννίτα,

(α) *Περπατά με σταθερή ταχύτητα (σταθερό ρυθμό).*

(β) *Περπατά και σταδιακά επιταχύνει (αυξάνει συνεχώς την ταχύτητά της).*

(γ) *Περπατά με σταθερή ταχύτητα, σταματά για λίγο και συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα.*

(δ) *Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει (μειώνει συνεχώς την ταχύτητά της).*

(ε) *Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει, σταματά για λίγο και μετά σταδιακά επιταχύνει.*

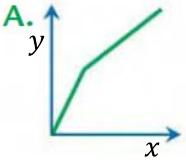
5. Μια βρύση γεμίζει τα πιο κάτω δοχεία (με σταθερό ρυθμό). Ποια είναι η γραφική παράσταση του ύψους του νερού (y) σε κάθε δοχείο συναρτήσει του χρόνου (x);

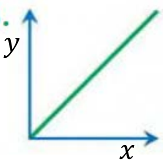
1.

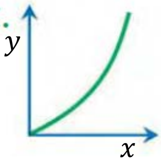

2.

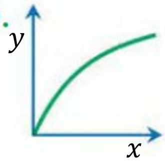

3.


4.

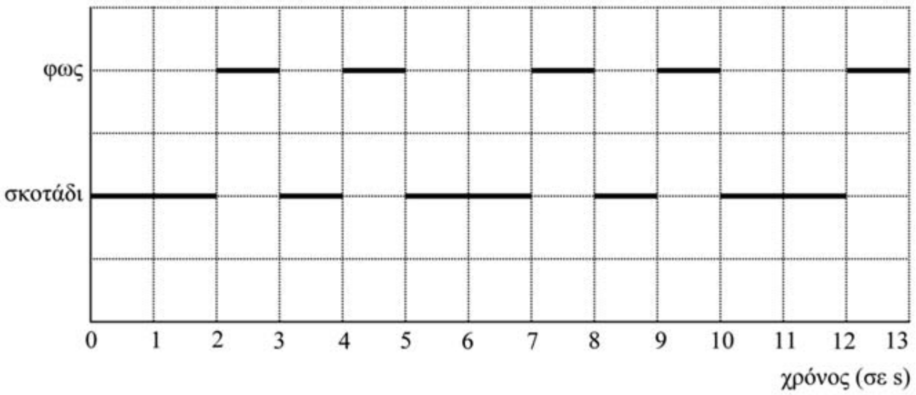

A.


B.


C.


D.


6. Ο σηματοδότης κάθε φάρου στέλνει φωτεινά σήματα με έναν καθορισμένο τρόπο. Κάθε φάρος έχει τον δικό του ρυθμό που αναβοσβήνει. Στο πιο κάτω διάγραμμα βλέπετε τον ρυθμό με τον οποίο αναβοσβήνει ένας συγκεκριμένος φάρος. Το φως ανάβει εναλλάξ ανάμεσα σε σκοτεινές περιόδους.



Αυτός είναι ένας συνηθισμένος τύπος φωτισμού. Ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα ο τύπος φωτισμού επαναλαμβάνεται. Ο χρόνος για έναν πλήρη κύκλο του τύπου φωτισμού, πριν αρχίσει να επαναλαμβάνεται, ονομάζεται *περίοδος*. Αν βρείτε την περίοδο ενός τύπου φωτισμού, είναι εύκολο να επεκτείνετε το διάγραμμα για τα επόμενα δευτερόλεπτα ή λεπτά ή ώρες.

<u>Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για καθεμιά από τις πιο κάτω ερωτήσεις:</u>

(α) Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι η περίοδος (σε δευτερόλεπτα) του τύπου φωτισμού αυτού του φάρου;

Α. 2 Β. 3 Γ. 5 Δ. 12

(β) Για πόσα δευτερόλεπτα ο φάρος στέλνει φωτεινά σήματα κατά τη διάρκεια ενός λεπτού;

Α. 4 Β. 12 Γ. 20 Δ. 24

(γ) Να σχεδιάσετε σε ένα διάγραμμα τον πιθανό τύπο φωτισμού ενός φάρου που στέλνει φωτεινά σήματα διάρκειας 30 δευτερολέπτων σε κάθε λεπτό. Η περίοδος αυτού του τύπου φωτισμού πρέπει να είναι ίση με 6 δευτερόλεπτα.

PISA 2003

7. Για λόγους υγείας, οι άνθρωποι θα πρέπει να περιορίζουν τις δυνάμεις τους, για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της άθλησης, ώστε να μην υπερβούν μια συγκεκριμένη συχνότητα καρδιακών παλμών. Για χρόνια, η σχέση ανάμεσα στην προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών ενός ατόμου και στην ηλικία του, περιγραφόταν με τον τύπο:
$Προτεινόμενη\ μέγιστη\ συχνότητα\ καρδιακών\ παλμών\ =$
$220 – ηλικία.$
Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ο τύπος αυτός θα έπρεπε να τροποποιηθεί λίγο. Ο καινούριος τύπος είναι ο ακόλουθος:
$$Προτεινόμενη\ μέγιστη\ συχνότητα\ καρδιακών\ παλμών$$
$$= 208 - 0{,}7 \cdot ηλικία$$

(α) Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει: «Λόγω της χρήσης του νέου τύπου αντί του παλιού, ο μέγιστος αριθμός που προτείνεται για τους καρδιακούς παλμούς ανά λεπτό, μειώνεται λίγο για τους νέους ανθρώπους και αυξάνεται λίγο για τους ηλικιωμένους».
Από ποια ηλικία και μετά αυξάνεται η προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών λόγω χρήσης του νέου τύπου; Να περιγράψετε τον τρόπο σκέψης σας.

(β) Ο τύπος της *Προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας καρδιακών παλμών* χρησιμοποιείται, επίσης, για να εκτιμηθεί πότε η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική. Έρευνες έχουν δείξει ότι η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική, όταν οι καρδιακοί παλμοί φθάσουν στο 80% της προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας. Να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει τη συχνότητα καρδιακών παλμών, ως συνάρτηση της ηλικίας, για να είναι η σωματική άσκηση πιο αποτελεσματική.

$PISA\ \ 2003$

ΕΝΟΤΗΤΑ

9

Γεωμετρία ΙΙ

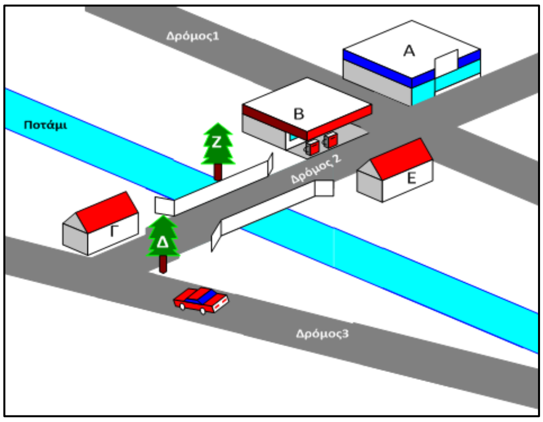
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε τις σχέσεις των γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία.
- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε τις σχέσεις των εσωτερικών και των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου.
- Να ορίζουμε και να κατασκευάζουμε τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου (ύψος, διάμεσο και διχοτόμο τριγώνου).

Παράλληλες Ευθείες που τέμνονται από μια άλλη Ευθεία

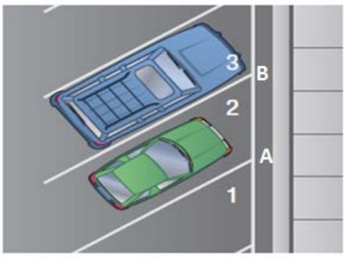
Διερεύνηση (1)

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τέσσερα κτήρια και δύο δέντρα. Να περιγράψετε τη θέση των A, B, Γ, Δ, E και Z σε σχέση με τους δρόμους 1, 2, 3 και το ποτάμι.



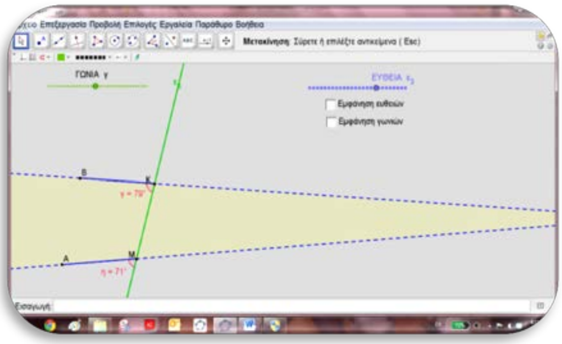
Διερεύνηση (2)

Ο πολιτικός μηχανικός που επιβλέπει τον σχεδιασμό του χώρου στάθμευσης ενός σχολείου έδωσε οδηγίες στο συνεργείο να χαράξει ευθύγραμμα τμήματα, για να σχηματιστούν οι θέσεις στάθμευσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα ευθύγραμμα τμήματα πρέπει να είναι παράλληλα, για να διασφαλίζεται η ομοιόμορφη στάθμευση.



- ✓ Να προτείνετε τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η χάραξη των τμημάτων.

Μπορείτε να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En7_paralliles.ggb»* για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



Μετακίνηση: Σύρετε ή επιλέξτε αντικείμενα (Esc)

☐ Εμφάνιση ευθειών

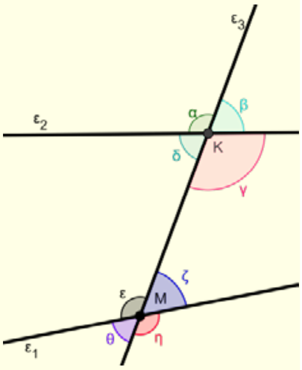
☐ Εμφάνιση γωνιών

- ✓ Με τη βοήθεια του δρομέα «ΓΩΝΙΑ γ» να δώσετε διαφορετικές τιμές στη γωνιά και να εξετάσετε τη θέση των τμημάτων.

- ✓ Να εμφανίσετε τις ευθείες και να μελετήσετε τη σχέση των γωνιών που σχηματίζονται από τις τρεις ευθείες.

Μαθαίνω

- Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο ευθείες του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ε_3 τότε σχηματίζονται 8 γωνίες, 4 με κορυφές το K $(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\delta})$ και 4 με κορυφές το M $(\hat{\varepsilon},\hat{\zeta},\hat{\eta},\hat{\theta})$, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



  ➢ Οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2 ονομάζονται **«εντός»** και οι υπόλοιπες **«εκτός».**
  Παράδειγμα:
  Οι γωνίες $\hat{\gamma},\hat{\delta},\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\zeta}$ ονομάζονται «εντός» και οι γωνίες $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\theta}$ και $\hat{\eta}$ ονομάζονται «εκτός».

  ➢ Με τις γωνίες αυτές σχηματίζουμε ζεύγη, μία με κορυφή το K και μία με κορυφή το M. Ορισμένα από τα ζεύγη αυτά, ανάλογα με τη θέση που έχουν ως προς τις ευθείες ε_1, ε_2 και την ευθεία ε_3 που τις τέμνει, έχουν ιδιαίτερα ονόματα. Οι γωνίες των ζευγών που βρίσκονται:

  - προς το ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ε3 ονομάζονται **«επί τα αυτά»** της ευθείας ε3.

  Παράδειγμα:
  Οι γωνίες $\hat{\theta},\hat{\delta}$ και $\hat{\delta},\hat{\varepsilon}$ ονομάζονται «επί τα αυτά».

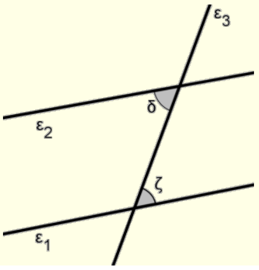
  - η μία στο ένα και η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας ε3, ονομάζονται **«εναλλάξ»** της ευθείας ε3.

  Παράδειγμα:
  Οι γωνίες $\hat{\delta},\hat{\eta}$ και $\hat{\zeta},\hat{\delta}$ ονομάζονται «εναλλάξ».

Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται (όχι κάθετα) από μια τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζονται 8 γωνίες:
- ♦ 4 οξείες που είναι ίσες μεταξύ τους
- ♦ 4 αμβλείες που είναι ίσες μεταξύ τους
- ♦ κάθε οξεία με κάθε αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

- Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο **παράλληλες** ευθείες οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ε_3, τότε:
  ➢ οι **«εντός εναλλάξ»** γωνίες είναι **ίσες,**
  ➢ οι «**εντός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **παραπληρωματικές,**
  ➢ οι «**εντός – εκτός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **ίσες.**

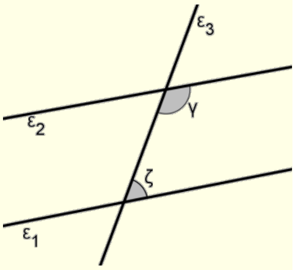
- **Αντίστροφα:**
  ➢ Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις **«εντός εναλλάξ»** γωνίες <u>ίσες</u>, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι <u>παράλληλες</u>.
  Παράδειγμα:
  Αν $\hat{\delta} = \hat{\zeta} = 68^\circ$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



- Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις «**εντός και επί τα αυτά**» γωνίες παραπληρωματικές, τότε οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

  Παράδειγμα:

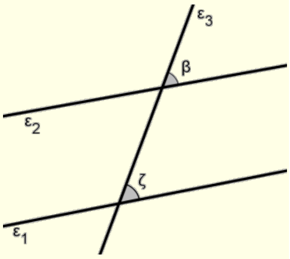
  Αν $\hat{\gamma} = 120^{\circ}$ και $\hat{\zeta} = 60^{\circ}$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, αφού $\hat{\gamma} + \hat{\zeta} = 180°$.



- Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις «**εντός – εκτός και επί τα αυτά**» γωνίες ίσες, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

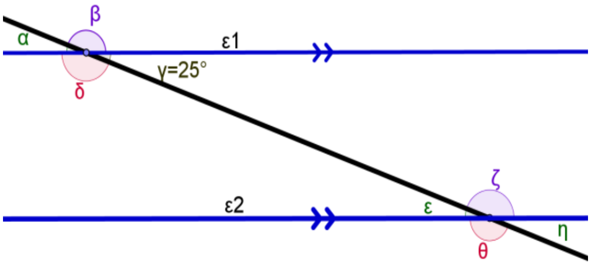
  Παράδειγμα:

  Αν $\hat{\beta} = \hat{\zeta} = 62^{\circ}$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Παραδείγματα

1. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Αν $\hat{\gamma} = 25°$, να υπολογίσετε τις γωνίες: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, \hat{\eta}$ και $\hat{\theta}$.



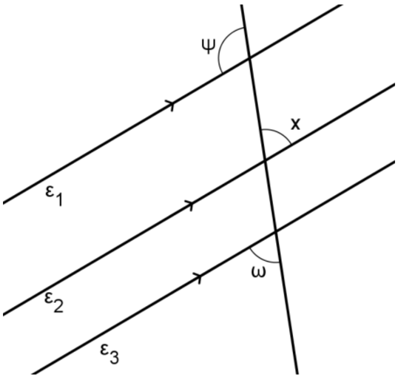
Λύση:

Για τις γωνίες του σχήματος ισχύει:

- $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 25°$ *(κατακορυφήν γωνίες)*
- $\hat{\beta} + \hat{\alpha} = 180°$ *(παραπληρωματικές γωνίες)*
  Άρα, $\hat{\beta} = 180° - 25° = 155°$
- $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 155°$ *(κατακορυφήν γωνίες)*
- $\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} = 25°$ *(εντός εναλλάξ γωνίες)*
- $\hat{\zeta} + \hat{\gamma} = 180°$*(εντός επί τα αυτά γωνίες)*
  Άρα, $\hat{\zeta} = 180° - \hat{\gamma} = 180° - 25° = 155°$
- $\hat{\theta} = \hat{\delta} = 155°$ *(εντός – εκτός και επί τα αυτά γωνίες)*
- $\hat{\eta} = \hat{\varepsilon} = 25°$ *(κατακορυφήν γωνίες).*

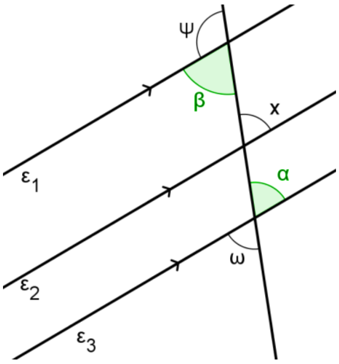
Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες σχέσεις που συνδέουν τις γωνίες του σχήματος.

2. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Αν $\widehat{\omega} = 68°$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\psi}$ και $\widehat{x}$.



Λύση:

Σημειώνω τις βοηθητικές γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$.

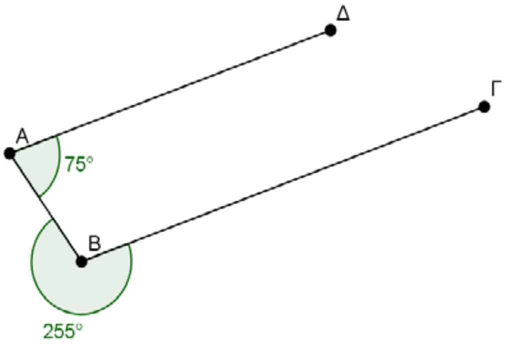


Για τις γωνιές του σχήματος ισχύει:

- $\widehat{\alpha} = \widehat{\omega} = 68°$ *(κατακορυφήν γωνίες)*
- $\widehat{x} = \widehat{\alpha} = 68°$ *(εντός – εκτός και επί τα αυτά)*
- $\widehat{\beta} = \widehat{x} = 68°$ *(εντός εναλλάξ γωνίες)*
- $\widehat{\psi} + \widehat{\beta} = 180°$*(παραπληρωματικές γωνίες)*

Άρα, $\widehat{\psi} = 180° - \widehat{\beta} = 180° - 68° = 112°$

3. Να εξετάσετε αν η $Α\Delta$ είναι παράλληλη της $Β\Gamma$, με βάση το διπλανό σχήμα.



Λύση:

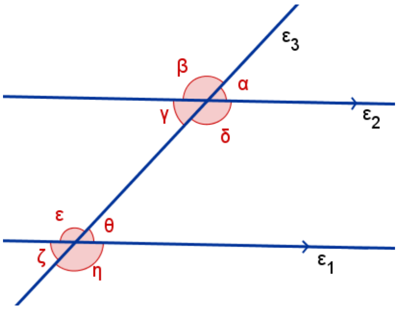
Για τις γωνιές του σχήματος ισχύει:

- $\Gamma\widehat{B}A = 360° - 255° = 105°$

- *Εξετάζω τη σχέση των γωνιών* $B\widehat{A}\Delta, \Gamma\widehat{B}A$*:*
  $B\widehat{A}\Delta + \Gamma\widehat{B}A = 75° + 105° = 180°$
  Άρα,
  οι γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ *και* $\Gamma\widehat{B}A$ *είναι* *παραπληρωματικές*,
  οι γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ *και* $\Gamma\widehat{B}A$ *είναι* *εντός και επί τα αυτά*,
  Από αυτό συνεπάγεται ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$.

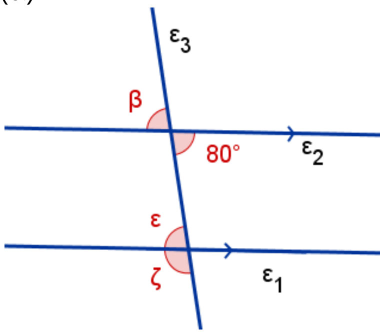
Δραστηριότητες

1. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Με βάση το σχήμα να γράψετε δύο ζεύγη γωνιών που είναι:
   (α) Εντός εναλλάξ,
   (β) Εντός και επί τα αυτά,
   (γ) Εντός εκτός και επί τα αυτά.

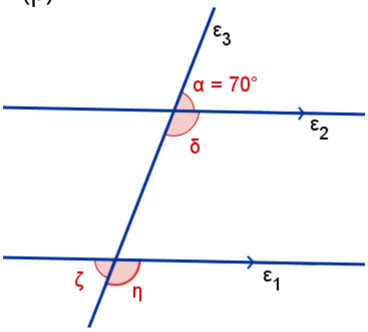


2. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

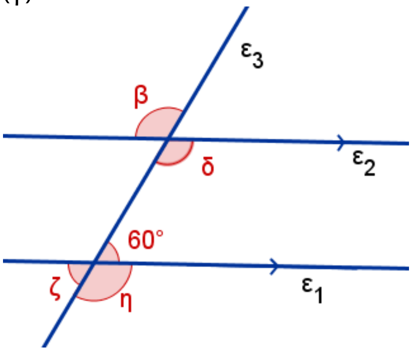
(α)



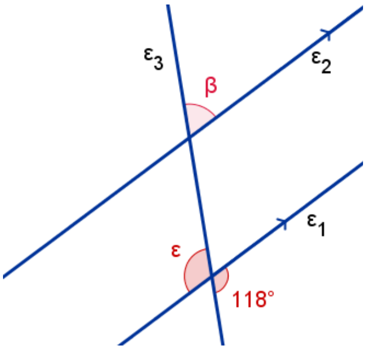
(β)



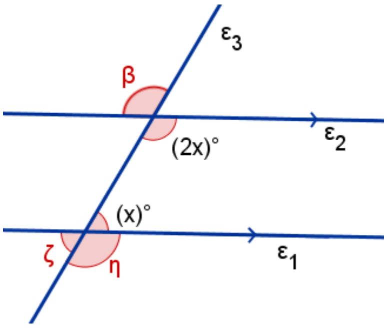
(γ)



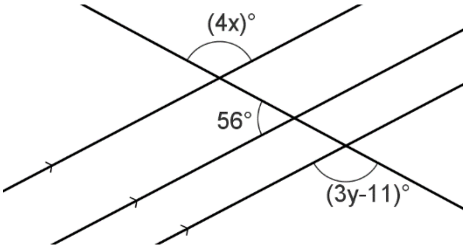
(δ)



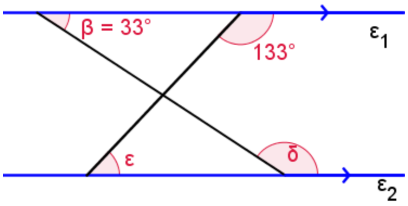
3. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

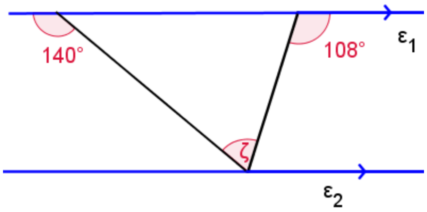


4. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y, στο διπλανό σχήμα.

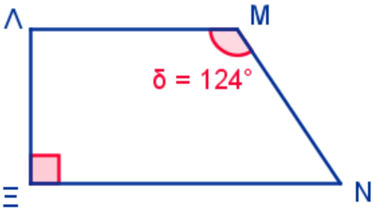


5. Στα πιο κάτω σχήματα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

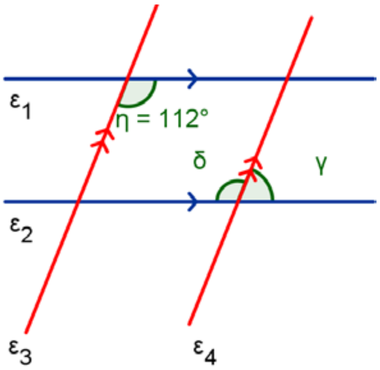


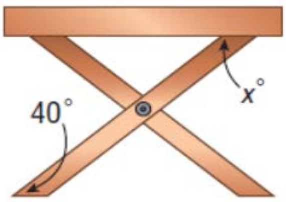


6. Στο διπλανό τετράπλευρο $ΛΜ \parallel ΞΝ$ και η πλευρά $ΛΞ$ είναι κάθετη στη $ΞΝ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $Λ$ και $Ν$ του τετραπλεύρου.



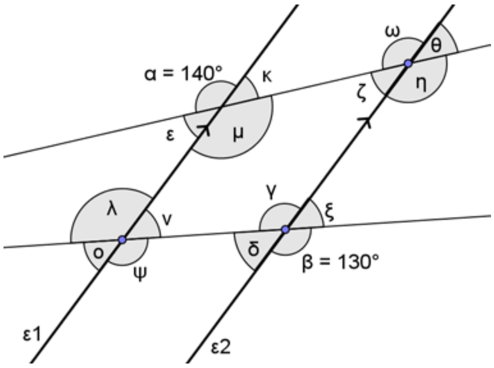
7. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\gamma}$.



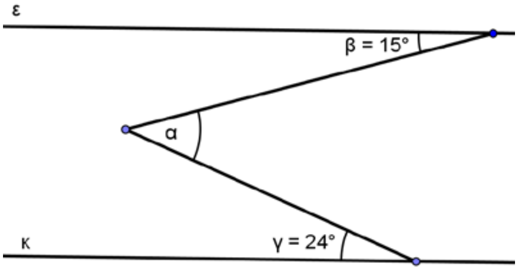


8. Ο κύριος Αντρέας προσπαθεί να κατασκευάσει ένα τραπεζάκι για τη βεράντα του σπιτιού του. Το σχέδιο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έκοψε το ένα άκρο του ενός από τα δύο ίσα ξύλινα πόδια υπό γωνία 40°. Να βρείτε υπό ποια γωνία $x°$ πρέπει να κόψει το άλλο άκρο του ποδιού στο σημείο που φαίνεται στο σχήμα, ώστε να διασφαλίσει ότι η άνω επιφάνεια του τραπεζιού θα είναι παράλληλη με το έδαφος.

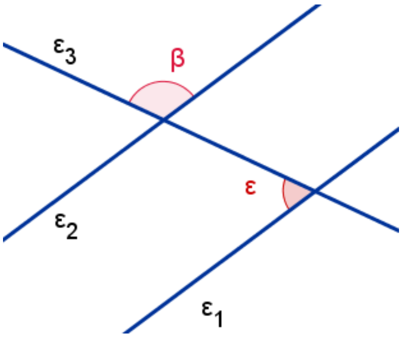
9. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



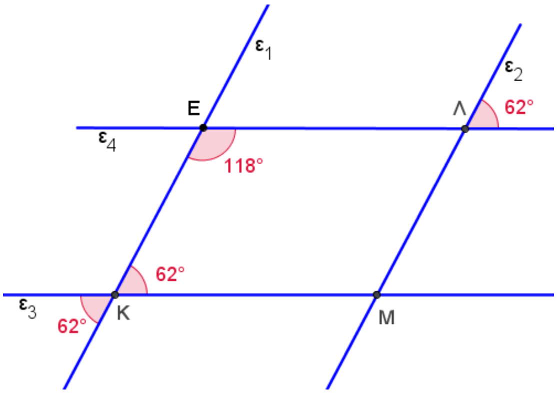
10. Στο σχήμα $\varepsilon \parallel \kappa$. Αν $\hat{\beta} = 15°$ και $\hat{\gamma} = 24°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$.



11. Στο διπλανό σχήμα η $\hat{\beta} = 120° - \hat{\theta}$ και η $\hat{\varepsilon} = 60° + \hat{\theta}$. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



12. Να βρείτε ζεύγη παράλληλων ευθειών στο πιο κάτω σχήμα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



Κύρια Στοιχεία Τριγώνου
Σχέσεις Γωνιών Τριγώνου

Έχουμε μάθει

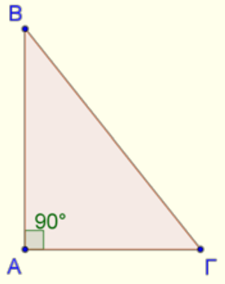
- **Τρίγωνο** είναι το πολύγωνο που έχει **τρεις** πλευρές.
- **Κύρια Στοιχεία** Τριγώνου
  Κάθε τρίγωνο έχει:
  - τρεις **πλευρές,**
    Παράδειγμα: $AB, B\Gamma, \Gamma A$ *ή γ, α, β αντίστοιχα*
  - τρεις **γωνίες,**
    Παράδειγμα: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$

Το τρίγωνο με κορυφές A, B και Γ συμβολίζεται ως: $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ή $\triangle AB\Gamma$

Είδη τριγώνων με βάση τις γωνίες τους

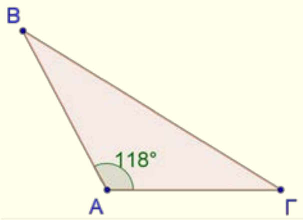
- **Ορθογώνιο** είναι το τρίγωνο που έχει μια ορθή γωνία.

  Παράδειγμα:
  $\hat{A} = 90°$



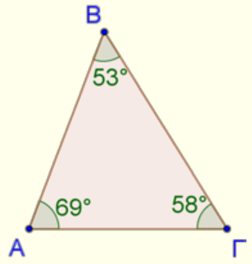
- **Αμβλυγώνιο** είναι το τρίγωνο που έχει μία αμβλεία γωνία.

  Παράδειγμα:
  $\hat{A} > 90°$



- **Οξυγώνιο** είναι το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

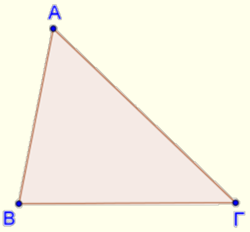
  Παράδειγμα:
  $\hat{A} < 90°$, $\hat{B} < 90°$ *και* $\hat{\Gamma} < 90°$



Είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές τους

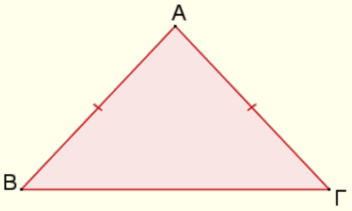
- **Σκαληνό** είναι το τρίγωνο που έχει τις πλευρές του άνισες.

  Παράδειγμα:
  $AB \neq B\Gamma \neq A\Gamma$



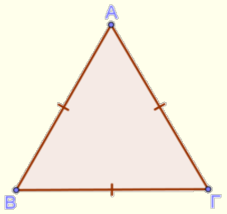
- **Ισοσκελές** είναι το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.

  Παράδειγμα:
  $AB = A\Gamma$



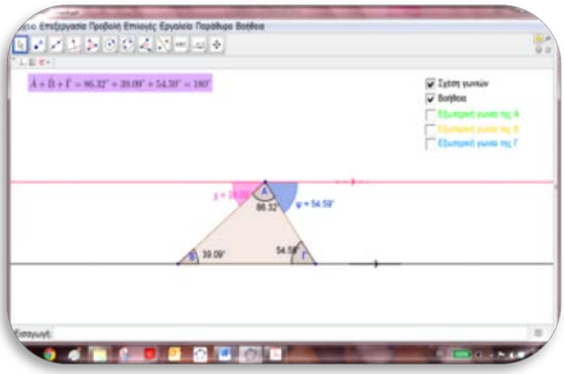
- **Ισόπλευρο** είναι το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές ίσες.

  Παράδειγμα:
  $AB = A\Gamma = B\Gamma$



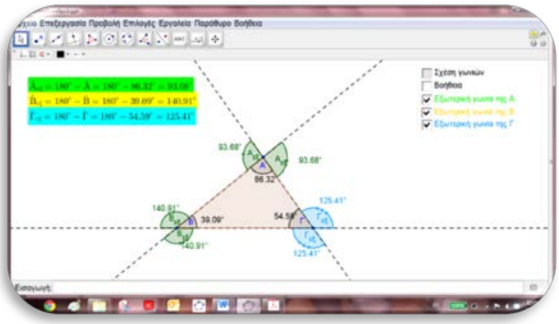
Διερεύνηση

Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «A_En7_Athrisma_Exxoteriki_Trig.ggb», για τις πιο κάτω δραστηριότητες:



- ✓ Να μετακινήσετε μια από τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ και να βρείτε μια σχέση των τριών γωνιών του τριγώνου.
- ✓ Να επαναλάβετε τη διαδικασία αρκετές φορές, για να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας.
- ✓ Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας με την εμφάνιση της βοήθειας.

- ✓ Να εμφανίσετε την εξωτερική γωνία της A και να διερευνήσετε για διαφορετικά τρίγωνα τη σχέση που τη συνδέει με τις γωνιές του τριγώνου.



$\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 180° - \hat{A} = 180° - 86.32° = 93.68°$

$\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180° - \hat{B} = 180° - 39.09° = 140.91°$

$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180° - \hat{\Gamma} = 180° - 54.59° = 125.41°$

- ✓ Να εξετάσετε αν ισχύει ο ισχυρισμός σας και για τις υπόλοιπες εξωτερικές γωνίες του τριγώνου.

Μαθαίνω

- Σε ισοσκελές τρίγωνο οι δύο ίσες πλευρές του ονομάζονται **σκέλη** του ισοσκελούς τριγώνου και η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση** του ισοσκελούς τριγώνου. Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ονομάζονται **παρά τη βάση γωνίες.**

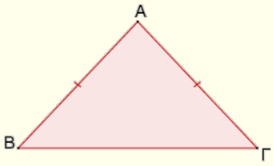
  Παράδειγμα:

  $\hat{B}, \hat{\Gamma}$: *παρά τη βάση γωνίες του* $\triangle\ AB\Gamma$.

- ➢ *Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Αντίστροφα, αν σε τρίγωνο δύο γωνίες είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

  Παράδειγμα:

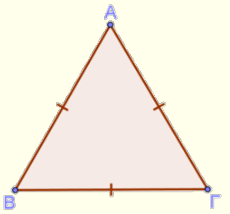
  Σε $\triangle\ AB\Gamma$ *αν ισχύει* $AB = A\Gamma$, *τότε* $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ *και αντίστροφα.*



- ➢ *Σε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Αντίστροφα, αν σε τρίγωνο και οι τρεις γωνίες είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.*

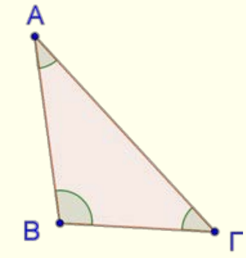
  Παράδειγμα:

  Σε $\triangle\ AB\Gamma$ *αν ισχύει* $AB = A\Gamma = B\Gamma$, *τότε* $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ *και αντίστροφα.*

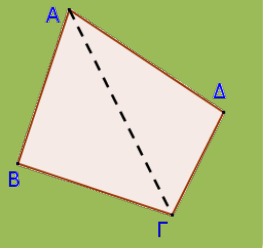


- Σε κάθε τρίγωνο το **άθροισμα των γωνιών** του είναι ίσο με 180°.

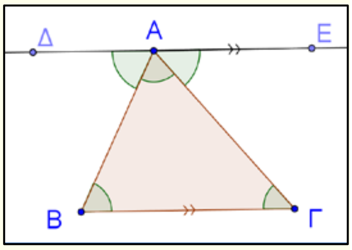
Παράδειγμα:
Στο τρίγωνο ΑΒΓ: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$



Χρησιμοποιώντας ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με 360°.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$

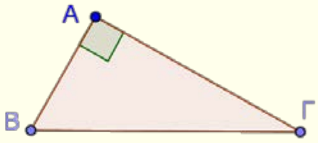


Απόδειξη:

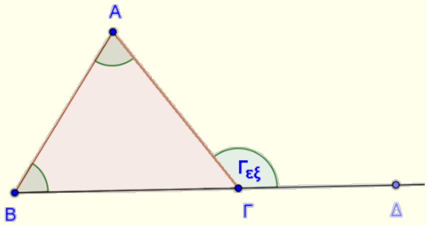


Σε πολλές αποδείξεις της γεωμετρίας θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε βοηθητικές ευθείες.
Για αυτή την απόδειξη θα φέρουμε βοηθητική ευθεία $\Delta E \parallel B\Gamma$ *που περνά από την κορυφή Α.*
$\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}\Gamma = 180^0$ *(1) (γωνίες σε ευθεία γραμμή).*
$\hat{B} = \Delta\hat{A}B$ *(εντός εναλλάξ γωνίες).*
$\hat{\Gamma} = E\hat{A}\Gamma$ *(εντός εναλλάξ γωνίες).*
Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$\hat{B} + B\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}\Gamma$ *(2).*
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B} + B\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o$,
δηλαδή το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180°.

➢ *Σε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών είναι ίσο με 90°.*
Παράδειγμα:
Στο $\triangle AB\Gamma$ *όπου* $\hat{A} = 90°$: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$



- Η γωνία που σχηματίζεται από τη μια πλευρά του τριγώνου και την προέκταση της άλλης, ονομάζεται **εξωτερική γωνία** του τριγώνου.



Παράδειγμα:
$A\hat{\Gamma}\Delta$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου*

➢ *Σε οποιοδήποτε τρίγωνο η κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.*

Παράδειγμα:
$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}$

Παραδείγματα

1. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνίες $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = (x + 30)°$ και $\hat{Γ} = (2x)°$.
   (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του.
   (β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

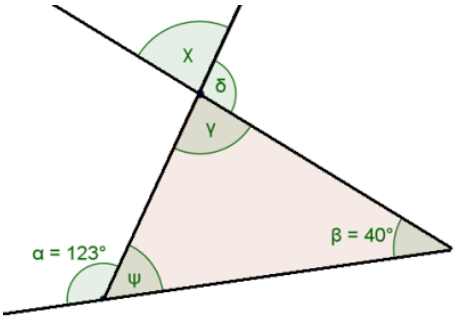
Λύση:

(α) *Σε κάθε τρίγωνο ισχύει:* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180°$

$\Rightarrow 30° + x + 30° + 2x = 180°$
$\Rightarrow 3x + 60° = 180°$
$\Rightarrow 3x = 180° - 60°$
$\Rightarrow 3x = 120°$
$\Rightarrow x = 120° : 3$
$\Rightarrow x = 40°$
Άρα, $\hat{B} = x + 30° = 40^o + 30^o = 70°$ *και*
$\hat{Γ} = 2x = 2 \cdot 40° = 80°$

(β) *Το τρίγωνο έχει τρεις οξείες γωνίες επομένως είναι οξυγώνιο. Το τρίγωνο έχει τρεις άνισες γωνίες επομένως θα έχει και τρεις άνισες πλευρές. Άρα, το τρίγωνο είναι σκαληνό.*

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες του διπλανού σχήματος που αναγράφονται με μικρά γράμματα.



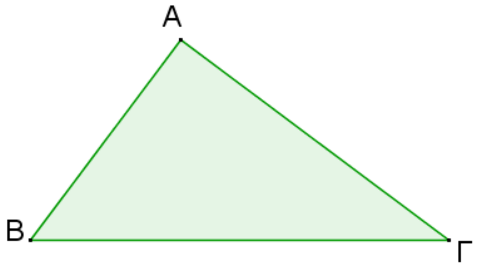
Λύση:

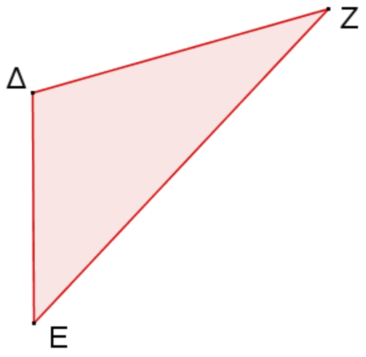
Για τις γωνιές του διπλανού σχήματος ισχύει:

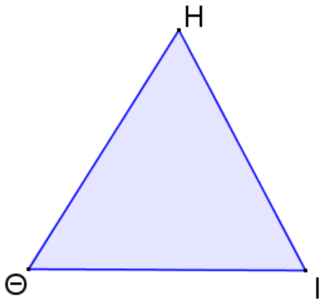
- $\hat{α} = \hat{β} + \hat{γ}$ *(εξωτερική γωνία τριγώνου)*
  $\Rightarrow 123° = 40° + \hat{γ}$
  $\Rightarrow \hat{γ} = 123° - 40° = 83°$
- $\hat{x} = \hat{γ} = 83°$ *(κατακορυφήν γωνίες)*
- $\hat{ψ} + \hat{α} = 180°$ *(ευθεία γωνία)*
  $\hat{ψ} + 123° = 180^o$
  $\Rightarrow \hat{ψ} = 57^o$
- $\hat{δ} = \hat{β} + \hat{ψ}$ *(εξωτερική γωνία τριγώνου)*
  $\Rightarrow \hat{δ} = 40° + 57° = 97°$

Δραστηριότητες

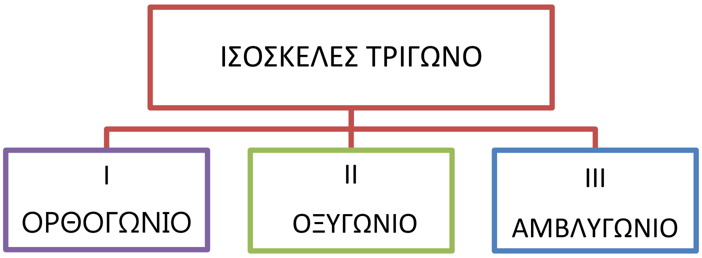
1. Με τη χρήση γνώμονα ή μοιρογνωμονίου, να χαρακτηρίσετε το είδος κάθε τριγώνου ως προς τις γωνίες του.







2. Στο διάγραμμα ταξινομούνται τα ισοσκελή τρίγωνα ως προς τις γωνίες τους.



(α) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο για καθεμιά από τις περιπτώσεις I, II και III.
(β) Να ταξινομήσετε τα ορθογώνια τρίγωνα ως προς τις πλευρές τους σε ένα διάγραμμα όπως το πιο πάνω.

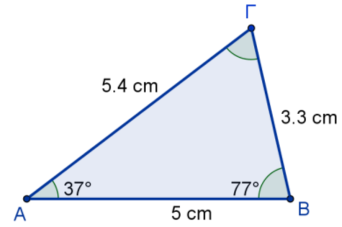
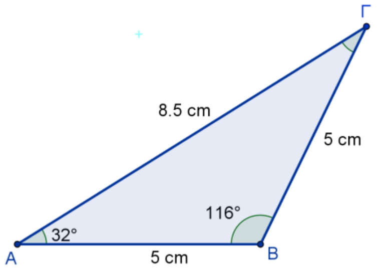
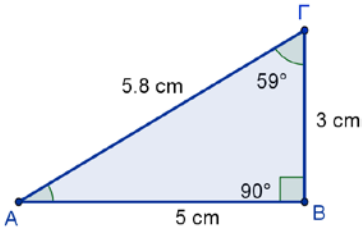
3. Δίνονται τα σύνολα:

A: τα ισοσκελή τρίγωνα
B: τα ορθογώνια τρίγωνα

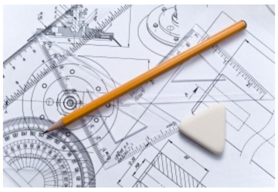
(α) Να ερμηνεύσετε τι ιδιότητες θα έχει ένα τρίγωνο που ανήκει στο σύνολο $A \cap B$.
(β) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο που να ανήκει στο σύνολο $A \cap B$.
(γ) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο που να ανήκει μόνο στο σύνολο B.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου έχει μέτρο 60°.

5. Να υπολογίσετε την άγνωστη γωνία του κάθε τριγώνου και ακολούθως να συμπληρώσετε τον πίνακα, βάζοντας ✓ στο ορθό.

	ΤΡΙΓΩΝΟ	Ονομασία ως προς γωνίες	Ονομασία ως προς πλευρές
(α)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο
(β)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο
(γ)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο

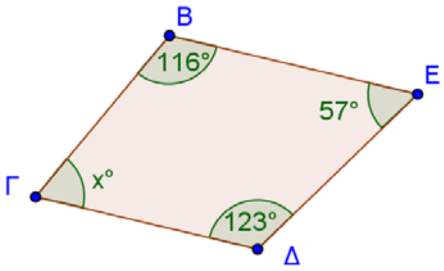
6. Να εξετάσετε την ορθότητα καθεμιάς από τις πιο κάτω προτάσεις:
   (α) *Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο ορθές γωνίες.*
   (β) *Σε ισοσκελές τρίγωνο, αν η μια γωνία είναι οξεία, τότε το τρίγωνο είναι σίγουρα οξυγώνιο.*
   (γ) *Οι εξωτερικές γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*
   (δ) *Αν μια από τις εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε όλες οι γωνίες του τριγώνου είναι οξείες.*



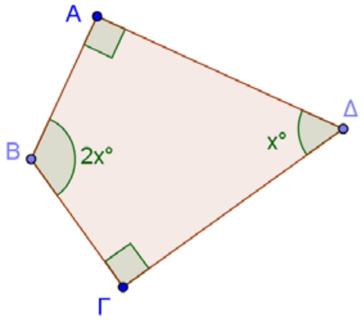
7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^{\circ}$) η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας $Γ$. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου.

8. Σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε την τιμή του x.

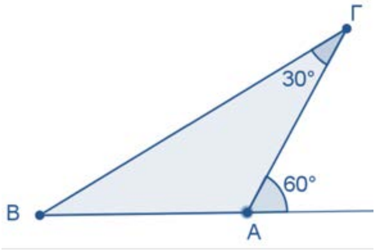
(α)



(β)

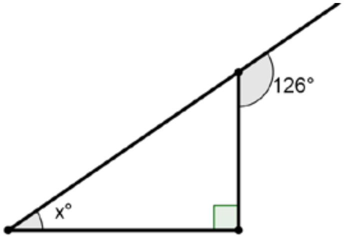


9. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$ και να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

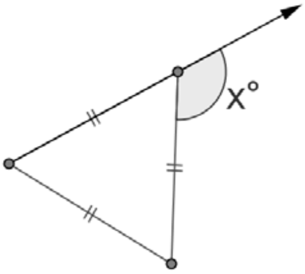


10. Να υπολογίσετε την τιμή του x με βάση τα πιο κάτω σχήματα.

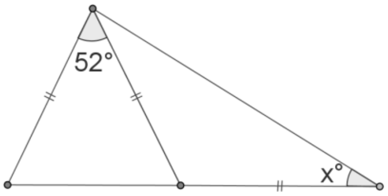
(α)



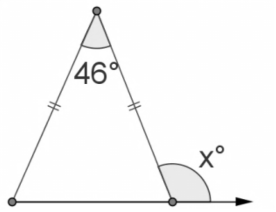
(β)



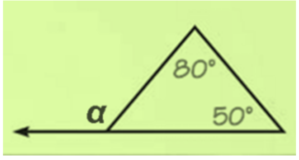
(γ)



(δ)

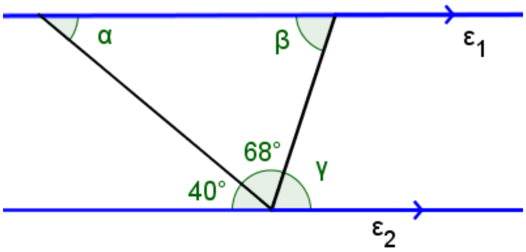


11. Με δεδομένο το σχήμα, ένας μαθητής έγραψε τη σχέση $\widehat{\alpha} + 80° + 50° = 180°$. Να εξετάσετε κατά πόσο ο συλλογισμός είναι ορθός και σε περίπτωση λάθους να δώσετε την ορθή απάντηση.

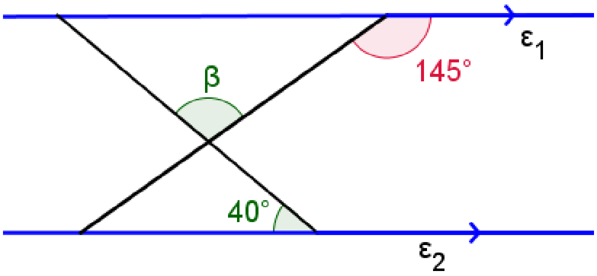


12. Η Στέφανη ισχυρίζεται ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ που να έχει γωνίες $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 100°$, $\hat{Γ} = 20°$. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.

13. Στο σχήμα $ε_1 \parallel ε_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{α}, \hat{β}$ και $\hat{γ}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



14. Στο πιο κάτω σχήμα $ε_1 \parallel ε_2$. Να υπολογίσετε τη γωνία $β$.



15. Να αποδείξετε ότι:

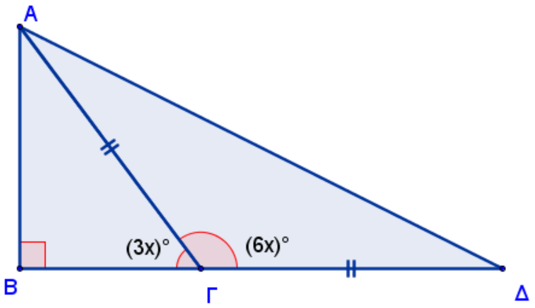
Σε οποιοδήποτε τρίγωνο η κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

16. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο και το $ΑΓΔ$ ισοσκελές.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x.

(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΓΔ.

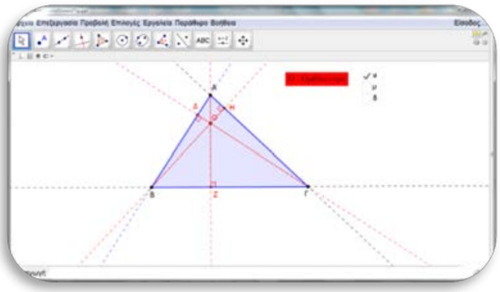


Δευτερεύοντα Στοιχεία Τριγώνου

Εξερεύνηση

Η Σοφία αγόρασε από ένα κατάστημα μία τριγωνική πλάκα ξύλου τραπεζιού και ένα μεταλλικό πόδι. Θέλει να τοποθετήσει το πόδι έτσι ώστε το τραπέζι να έχει την καλύτερη δυνατή ισορροπία. Μπορείτε να τη βοηθήσετε να βρει το κατάλληλο σημείο;

Διερεύνηση



Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En7_DeyterevontaStoixeiaTrig.ggb».

- ✓ Να επιλέξετε το *«υ»*. Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα AZ, BH και $ΓΔ$;

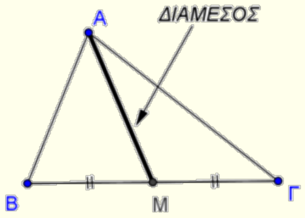
- ✓ Να μετακινήσετε μια κορυφή του τριγώνου $ΑΒΓ$ και να παρατηρήσετε τη θέση των AZ, BH και $ΓΔ$ σε σχέση με το τρίγωνο $ΑΒΓ$.

- ✓ Να παρατηρήσετε τη θέση του σημείου τομής των AZ, BH και $ΓΔ$ για διαφορετικά είδη τριγώνου.

- ✓ Να επαναλάβετε τα πιο πάνω βήματα, επιλέγοντας διαδοχικά το *«μ»* και το *«δ»*.

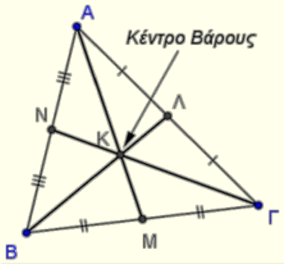
Μαθαίνω

- **Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

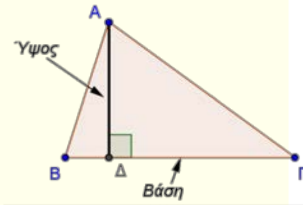


$BM = M\Gamma$

- **Κέντρο βάρους** ή **Βαρύκεντρο** ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.
  Παράδειγμα:
  Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρό του.

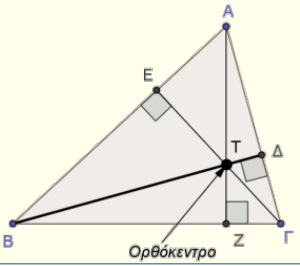


- **Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του. Η πλευρά αυτή ονομάζεται βάση του τριγώνου ως προς το συγκεκριμένο ύψος.

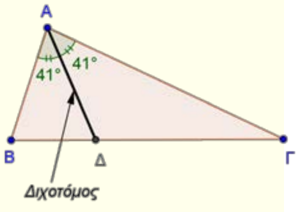


$A\Delta \perp B\Gamma$
$\hat{\Delta} = 90^0$

- **Ορθόκεντρο** είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου.
  Παράδειγμα:
  Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Τ είναι το ορθόκεντρό του.



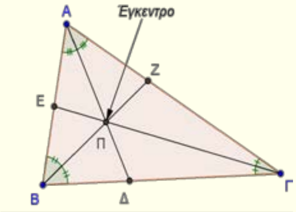
- **Διχοτόμος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνιά του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



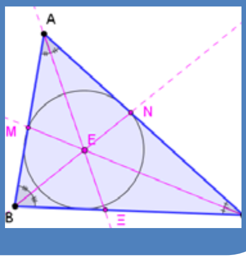
$B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$

- **Έγκεντρο** είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου.

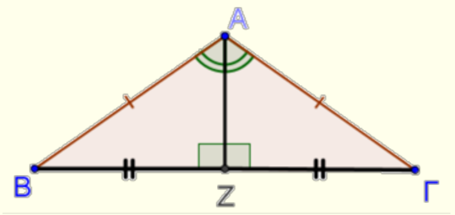
  Παράδειγμα:
  Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Π είναι το έγκεντρό του.



Το έγκεντρο είναι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου (εγγεγραμμένος κύκλος). Το έγκεντρο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου



- *Σε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διχοτόμος και διάμεσος.*



Παράδειγμα:

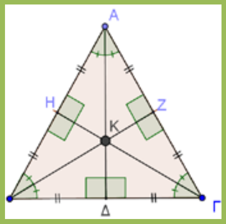
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ *το* AZ *είναι ύψος, διάμεσος και διχοτόμος.*

Άρα, $B\hat{A}Z = \Gamma\hat{A}Z$,

$AZ \perp B\Gamma$,

$BZ = Z\Gamma$

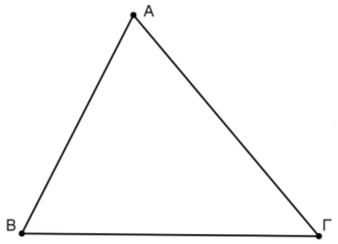
Σε ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος.



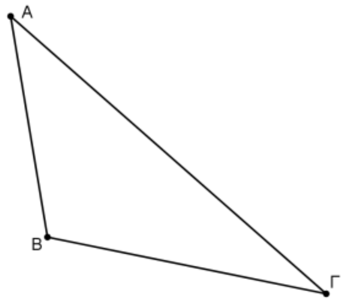
Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε τα ύψη στα πιο κάτω τρίγωνα.

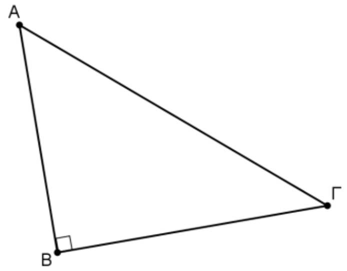
(α)



(β)

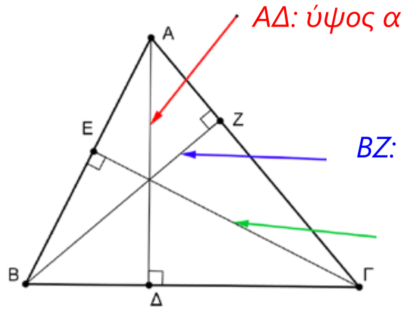


(γ)



Λύση:

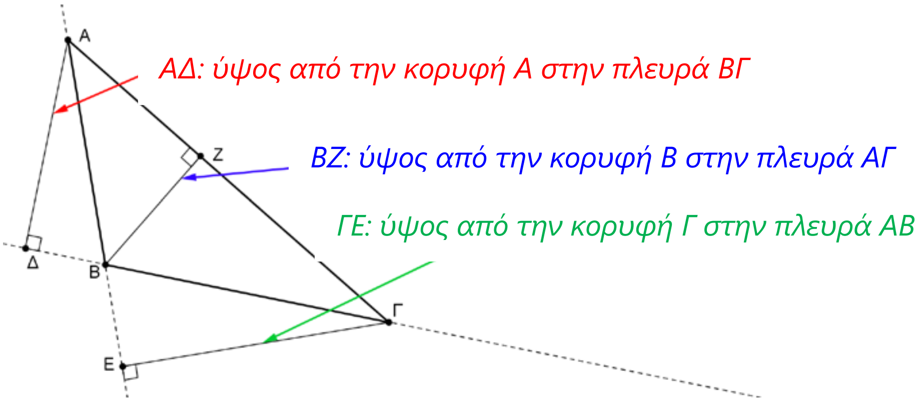
(α)



ΑΔ: ύψος από την κορυφή Α στην πλευρά ΒΓ

ΒΖ: ύψος από την κορυφή Β στην πλευρά ΑΓ

ΓΕ: ύψος από την κορυφή Γ στην πλευρά ΑΒ

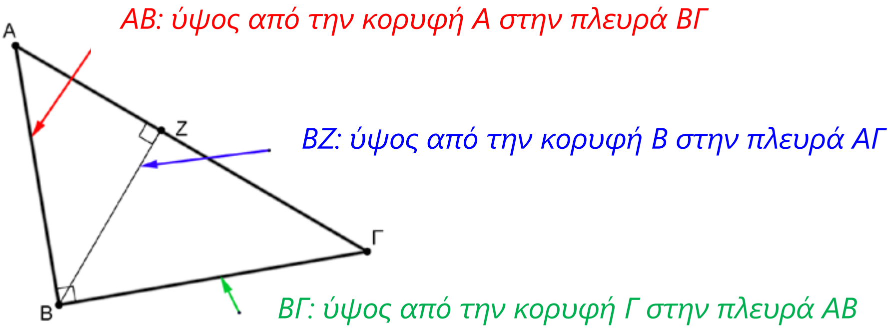


ΑΔ: ύψος από την κορυφή Α στην πλευρά ΒΓ

ΒΖ: ύψος από την κορυφή Β στην πλευρά ΑΓ

ΓΕ: ύψος από την κορυφή Γ στην πλευρά ΑΒ

(γ)

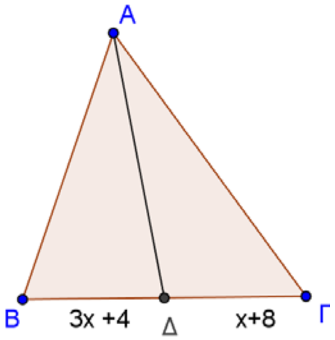


ΑΒ: ύψος από την κορυφή Α στην πλευρά ΒΓ

ΒΖ: ύψος από την κορυφή Β στην πλευρά ΑΓ

ΒΓ: ύψος από την κορυφή Γ στην πλευρά ΑΒ

2. Να υπολογίσετε την τιμή του x, αν η $ΑΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$.



Λύση:

$ΑΔ$ διάμεσος $\Rightarrow ΒΔ = ΔΓ$

$$3x + 4 = x + 8$$

$$\Rightarrow 3x - x = 8 - 4$$

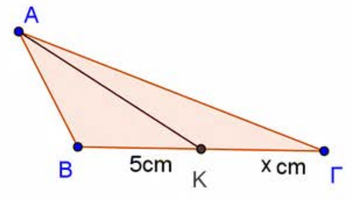
$$\Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 : 2$$

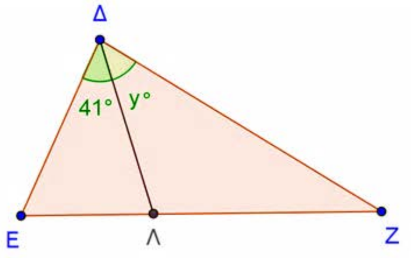
$$\Rightarrow x = 2$$

Δραστηριότητες

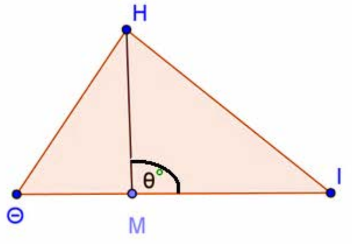
1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y και θ.



ΑΚ Διάμεσος



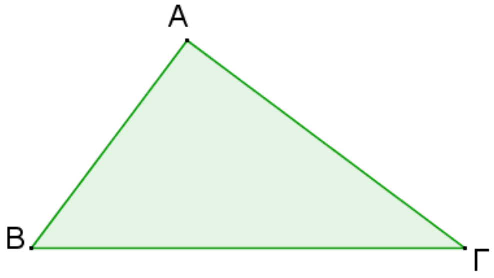
ΔΛ Διχοτόμος

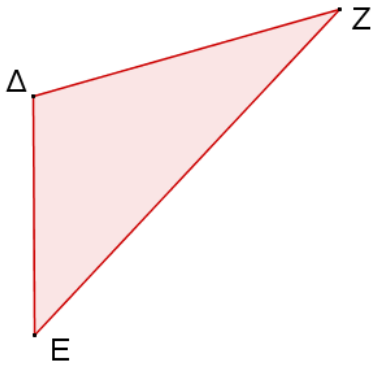


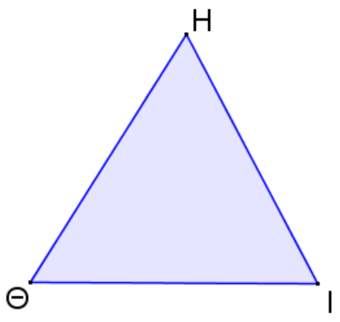
ΗΜ Ύψος

2. Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και να φέρετε το ύψος $ΑΔ$, τη διάμεσο $ΒΜ$ και τη διχοτόμο $ΓΕ$.

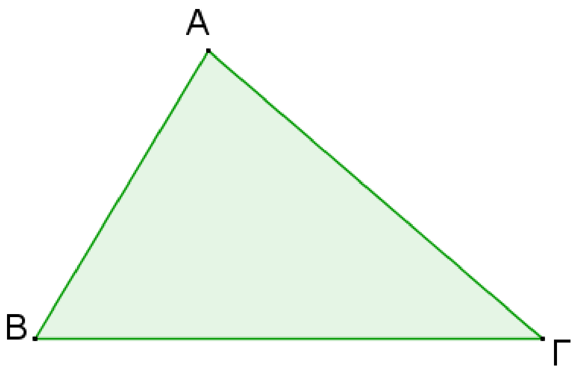
3. Να κατασκευάσετε τα ύψη των πιο κάτω τριγώνων.

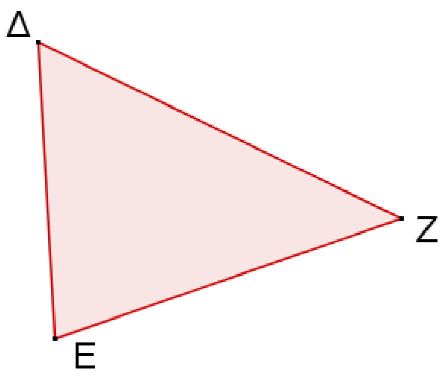




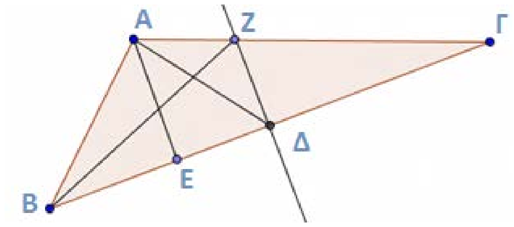


4. Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους των πιο κάτω τριγώνων.





5. Στο διπλανό σχήμα $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{B}Z$, $AE \perp B\Gamma$, $AE \parallel Z\Delta$, $B\Delta = \Delta\Gamma$.

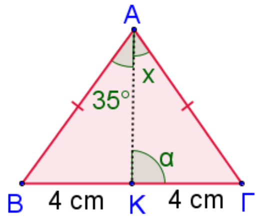


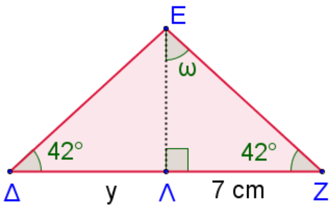
Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθύγραμμο τμήμα της στήλης A με μια πρόταση της στήλης B.

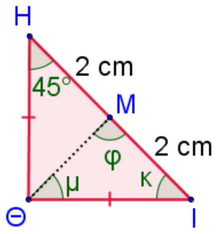
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1) AE	(α) Μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$
2) $A\Delta$	(β) Διχοτόμος της $\hat{A}$
3) $Z\Delta$	(γ) Ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$
4) BZ	(δ) Διχοτόμος γωνίας B
	(ε) Διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$

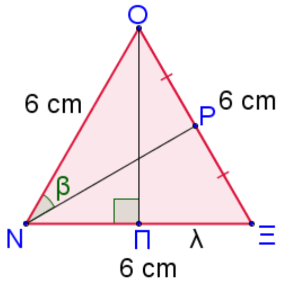
6. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5cm$ και $\hat{A} = 120°$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE και να τα συγκρίνετε με τη βοήθεια του διαβήτη.

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των $x, \alpha, y, \omega, \varphi, \mu, \kappa, \beta, \lambda$, στα πιο κάτω σχήματα:



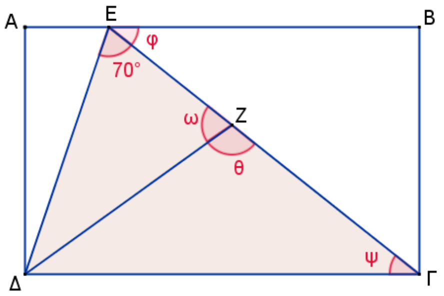






8. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 40°$ και $\hat{B} = 60°$. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ καθώς και την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών A και Γ.

9. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. Αν $\Delta E = \Delta Z$ και η ΔZ είναι διχοτόμος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\omega}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$.

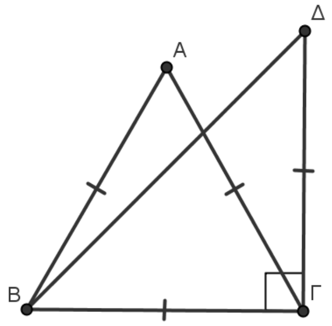


Δραστηριότητες Ενότητας

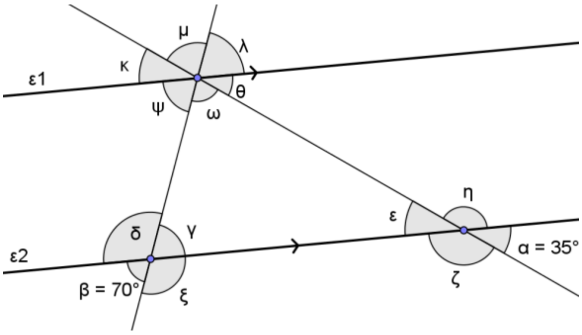
1. Να βρείτε το είδος του τριγώνου σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

	Ως προς τις γωνιές	Ως προς τις πλευρές
• *Οι δυο γωνίες του είναι* 60° *και* 60°		
• *Οι δυο γωνίες του είναι* 36° *και* 54°		
• *Η μια γωνία του είναι* 70° *και μια εξωτερική του γωνία είναι* 100°		
• *Δύο γωνίες του είναι ίσες και μια εξωτερική του γωνία είναι* 60°		

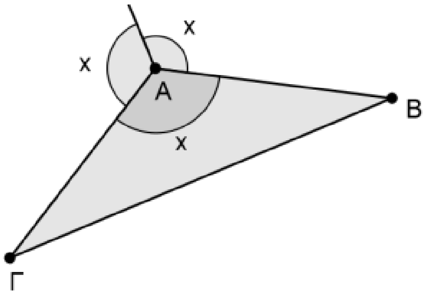
2. Στο διπλανό σχήμα $AB = B\Gamma = A\Gamma = \Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ ως προς τις πλευρές του και ως προς τις γωνίες του.



3. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

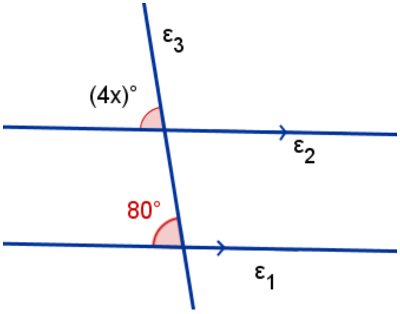


4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Να υπολογίσετε την τιμή του x και τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

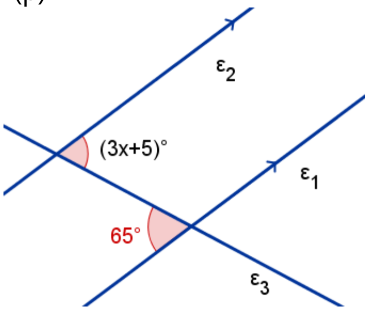


5. Να υπολογίσετε την τιμή του x, σε κάθε περίπτωση, έτσι ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

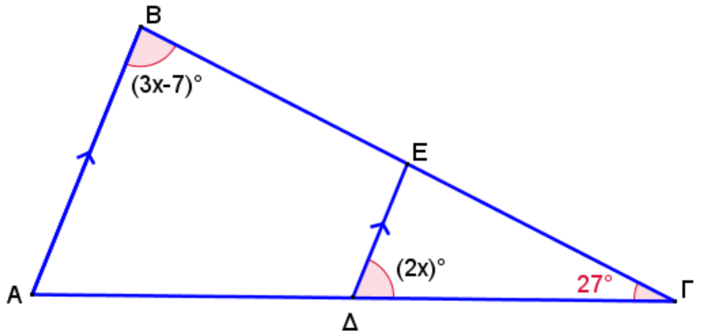
(α)



(β)



6. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x.



7. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε και οι τρίτες γωνίες είναι αντίστοιχα ίσες μεταξύ τους.

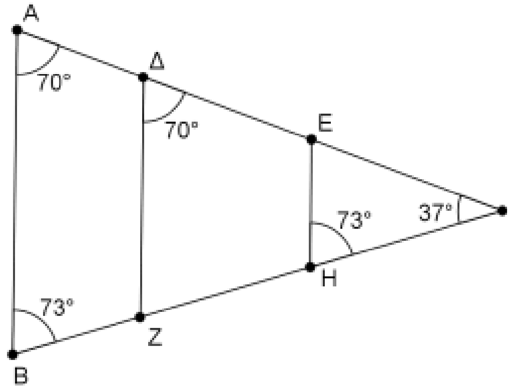
8. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ η γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 125°$ και η γωνία $\hat{B} = \frac{3}{5}\hat{A}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

9. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $5\,cm$ με χάρακα και διαβήτη. (*Πρόταση Ι.1, Ευκλείδη*)

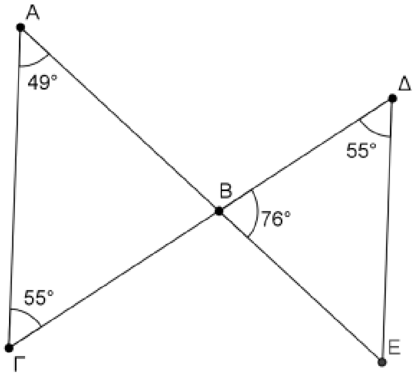
10. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(1,1)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(4,4)$. Να τοποθετήσετε τα σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να εξετάσετε το είδος του τρίγωνου $ΑΒΓ$ που σχηματίζεται ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

11. Να βρείτε ζεύγη παράλληλων ευθειών στα πιο κάτω σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

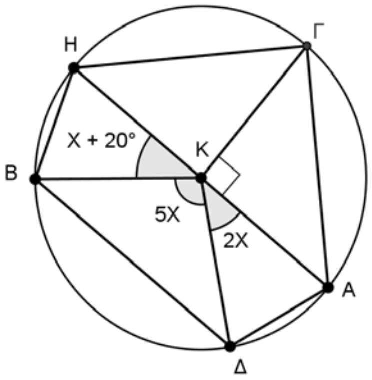
(α)



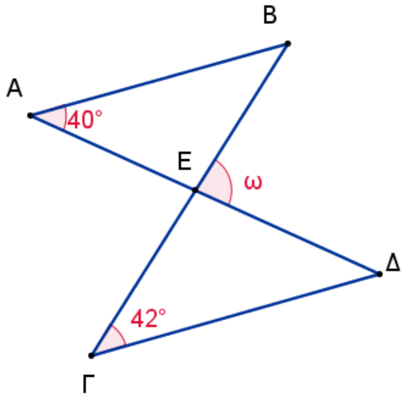
(β)



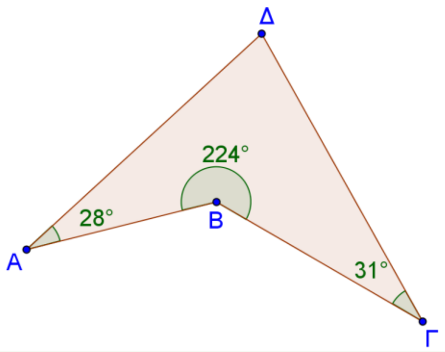
12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος με κέντρο K και διάμετρο HA. Να υπολογίσετε την τιμή του x και τις γωνίες $KHB, K\Gamma H$.



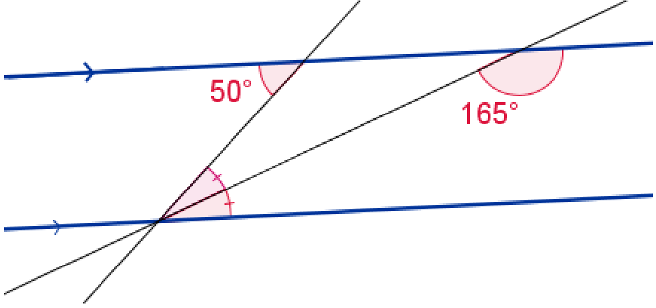
13. Αν $AB \parallel \Gamma\Delta$ να υπολογίσετε τη γωνία ω.

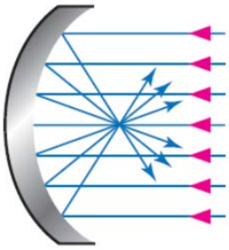


14. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δίνεται $\hat{A} = 28°$, $\hat{B} = 224°$ και $\hat{\Gamma} = 31°$. Να βρείτε τη γωνία $\hat{\Delta}$.



15. Στο πιο κάτω σχήμα να βρείτε το λάθος που υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





16. Ο κοίλος φακός στο διπλανό σχήμα συγκεντρώνει τις παράλληλες ακτίνες και τις εστιάζει σε ένα σημείο. Να σημειώσετε γωνίες στο διπλανό σχήμα που πρέπει να είναι ίσες, ώστε να διασφαλίζεται ότι οι ακτίνες του σχήματος είναι παράλληλες. Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

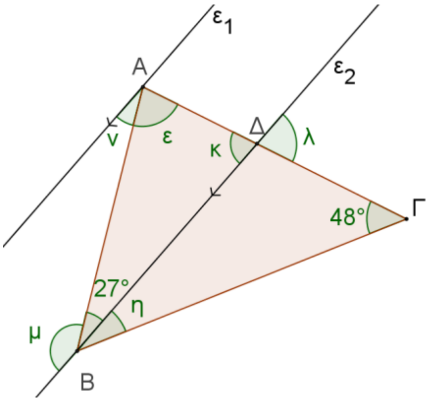
17. Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, για να δικαιολογήσετε ότι η πρόταση «*Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντοτε και ύψος του τριγώνου*», δεν ισχύει.

18. Η Κατερίνα στο μάθημα της Τέχνης έκοψε ψηφίδες, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, χαράζοντας δύο ζεύγη από παράλληλες γραμμές. Μέτρησε τις γωνίες της ψηφίδας και παρατήρησε κάποιες σχέσεις μεταξύ των γωνιών της ψηφίδας. Να σημειώσετε όσες περισσότερες σχέσεις μπορεί να παρατήρησε η Κατερίνα.

19. Τα α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, όπου $\alpha = 3x - 5$, $\beta = x + 1$ και $\gamma = 2x - 2$,
   (α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου, όταν $x = 4$.
   (β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.
   (γ) Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να υπάρξει τρίγωνο, όταν $x = 0$.

20. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1,-2), B(3,-1)$ και $\Gamma(1,6)$. Να τοποθετήσετε τα σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και στη συνέχεια να φέρετε τη διάμεσο $B\Delta$ και τη διχοτόμο AE του τριγώνου $AB\Gamma$.

21. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $Β\varDelta$ είναι διχοτόμος της $Α\hat{Β}\varGamma$ και $\hat{\varepsilon} = 77°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες που αναγράφονται με μικρά γράμματα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Οι ασκήσεις 22 και 23 να γίνουν με τη βοήθεια του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

22. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $Β\varGamma$.
    - (α) Να βρείτε το μέσο $\varDelta$ του $Β\varGamma$.
    - (β) Να φέρετε τη μεσοκάθετο του $Β\varGamma$.
    - (γ) Να τοποθετήσετε σημείο $Α$ στη μεσοκάθετο και να σχεδιάσετε το τρίγωνο $ΑΒ\varGamma$.
    - (δ) Να μετρήσετε το μήκος των πλευρών του τριγώνου.
    - (ε) Να βρείτε το μέτρο των $Β\hat{Α}\varDelta$ και $\varGamma\hat{Α}\varDelta$.
    - (στ) Να μετακινήσετε το σημείο $Α$ κατά μήκος της μεσοκαθέτου.
    - (ζ) Τι είδος τριγώνου είναι το $ΑΒ\varGamma$;
    - (η) Ποια είναι η σχέση των $Β\hat{Α}\varDelta$ και $\varGamma\hat{Α}\varDelta$;

23. Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒ\varGamma$.
    - (α) Να φέρετε το ύψος $Α\varDelta$.
    - (β) Να φέρετε τη διχοτόμο $ΑΕ$.
    - (γ) Να φέρετε τη διάμεσο $ΑΜ$.
    - (δ) Να μετακινήσετε τις κορυφές $Α, Β$ και $\varGamma$ και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:
        - i. Σε ποιο είδος τριγώνου τα τρία τμήματα $Α\varDelta$, $ΑΕ$ και $ΑΜ$ συμπίπτουν;
        - ii. Σε ποιο είδος τριγώνου το ύψος του μπορεί να βρίσκεται εκτός τριγώνου;
        - iii. Να εξετάσετε τη θέση των υψών ενός ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με τις πλευρές του.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

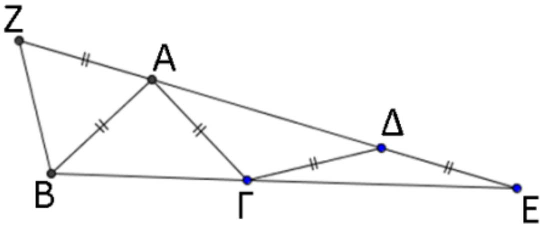
1. Ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Να αποδείξετε ότι:
   (α) οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες
   (β) δυο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές

2. Αν $\varepsilon, \kappa\ \kappa\alpha\iota\ \lambda$ είναι τρεις ευθείες έτσι ώστε $\varepsilon \parallel \kappa$ και $\lambda \perp \varepsilon$, να δείξετε ότι $\kappa \perp \varepsilon$.

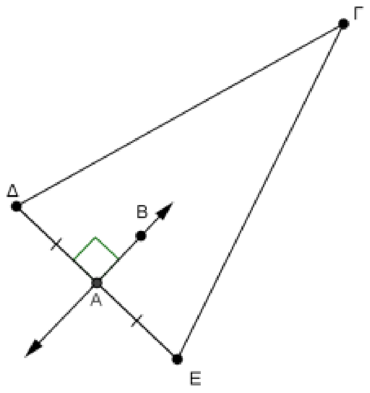
3. Να αποδείξετε:
   - ότι οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες
   - οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

4. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, $\hat{Β} > \hat{Γ}$ και $ΑΔ$ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$. Αν $ΑΕ \perp ΒΓ$ στο σημείο $Ε$, να δείξετε ότι $Δ\hat{Α}Ε = \frac{1}{2}(\hat{Β} - \hat{Γ})$.

5. Στο διπλανό σχήμα $ΑΖ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου $ΑΖΒ$, ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες του αν $\hat{Ε} = 10°$.



6. Με βάση το σχήμα να εντοπίσετε το λάθος στον ισχυρισμό:
   «η $ΑΒ$ διέρχεται πάντα από το σημείο $Γ$».



ΕΝΟΤΗΤΑ

10

Λόγοι-Αναλογίες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε και να ορίζουμε τον λόγο δύο ποσών και να συγκρίνουμε λόγους.
- Να ορίζουμε την αναλογία και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών.
- Να κατασκευάζουμε και να ερμηνεύουμε σχέδια υπό κλίμακα.
- Να επιλύουμε προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αναλογιών.
- Να διερευνούμε την έννοια του ποσοστού και να επιλύουμε προβλήματα ποσοστών (τόκου, φορολογίας, κέρδους και ζημιάς, κ.λπ.).

Λόγοι - Αναλογίες

Εξερεύνηση

Στον πιο κάτω πίνακα φαίνονται τα στοιχεία τριών ζωολογικών κήπων στην Ευρώπη.

Ζωολογικός κήπος	Έκταση σε εκτάρια	Αριθμός ζώων	Είδη ζώων
Λονδίνου	90	16800	750
Βερολίνου	30	17000	1500
Πράγας	45	5000	600

- ✓ Να μελετήσετε τα στοιχεία του πίνακα και να συγκρίνετε τους ζωολογικούς κήπους ως προς την έκταση τους, τον αριθμό των ζώων και τα είδη των ζώων.

Διερεύνηση (1)

Η τροχαία θέλει να τοποθετήσει μια κάμερα για έλεγχο των τροχαίων παραβάσεων. Αποφάσισε να κάνει μια έρευνα στα πιο επικίνδυνα σημεία του οδικού δικτύου της πόλης. Οι αστυνομικοί κατέγραψαν για μια εβδομάδα τις παραβιάσεις του ορίου ταχύτητας στα διάφορα σημεία και παρουσίασαν στον διευθυντή τροχαίας τα πιο κάτω αποτελέσματα:

Α Σημείο
Παραβίασε το όριο ταχύτητας το 20% των οδηγών

Β Σημείο
1 στους 5 οδηγούς παραβίασαν το όριο ταχύτητας

Γ Σημείο
Από τους 500 οδηγούς που πέρασαν παραβίασαν το όριο ταχύτητας οι 150

Δ Σημείο
Κάθε 3 οδηγοί που οδηγούσαν εντός του ορίου, 1 άλλος οδηγός το παραβίαζε

- ✓ Σε ποιο σημείο πιστεύετε ότι πρέπει να τοποθετηθεί η κάμερα, λαμβάνοντας υπόψη τις πιο πάνω πληροφορίες;

Διερεύνηση (2)

Ο Ανδρέας αποφάσισε να βάψει το δωμάτιό του και έκανε μόνος του την ανάμειξη των χρωμάτων για να φτιάξει μια συγκεκριμένη απόχρωση του γαλάζιου. Ανάμιξε 6 λίτρα μπλε μπογιά με 9 λίτρα άσπρη μπογιά. Η μπογιά που έφτιαξε δεν ήταν αρκετή και έφτιαξε νέο μείγμα στο οποίο ανάμιξε 4 λίτρα μπλε μπογιά με 7 λίτρα άσπρη μπογιά.

✓ Να εξετάσετε αν ο Ανδρέας πέτυχε τη δεύτερη φορά να φτιάξει την ίδια απόχρωση του γαλάζιου με την αρχική.

Μαθαίνω

- **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών $\boldsymbol{\alpha}$** και $\boldsymbol{\beta}$, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι **το πηλίκο των μέτρων τους**.
  Ο λόγος του $\boldsymbol{\alpha}$ προς το $\boldsymbol{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως:

  $\boldsymbol{\alpha}$ προς $\boldsymbol{\beta}$ ή $\boldsymbol{\alpha : \beta}$ ή $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$.

  Παράδειγμα:
  Σε ένα τμήμα φοιτούν 12 αγόρια και 10 κορίτσια.
  Ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι:
  12 *προς* 10 *ή* $12 : 10$ *ή* $\frac{12}{10}$ *ή πιο απλά* $\frac{6}{5}$

- Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών), θα ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο.

  Παράδειγμα:
  Το αυτοκίνητο του κυρίου Κώστα με 50 λίτρα διανύει συνήθως 800 km.
  Ο λόγος της απόστασης που διανύει προς την ποσότητα βενζίνης που καταναλώνει είναι:

$$\frac{απόσταση\ (km)}{ποσότητα\ \ (λίτρα)} = \frac{800}{50}\frac{km}{λίτρα} = 16\ \frac{km}{λίτρο}$$

- **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

  Παράδειγμα:
  $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$

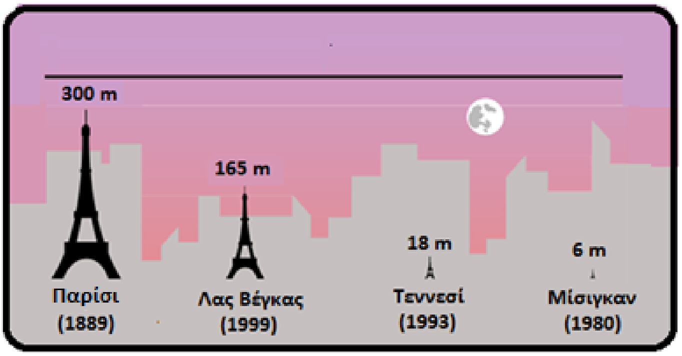
- Οι α, β, γ και δ λέγονται **όροι** της αναλογίας.
  - Οι α και δ λέγονται **άκροι όροι** της αναλογίας.
  - Οι β και γ λέγονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.
  - Οι α και γ λέγονται **ηγούμενοι όροι** της αναλογίας.
  - Οι β και δ λέγονται **επόμενοι όροι** της αναλογίας.

  Παράδειγμα:
  $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ *Άκροι όροι: 3 και 12* *Μέσοι όροι: 9 και 4*
  Ηγούμενοι όροι: 3 και 4 *Επόμενοι όροι: 9 και 12*

Παραδείγματα

1. Ο πύργος του Άιφελ κτίστηκε το 1889 και πήρε το όνομά του από τον μηχανικό που τον σχεδίασε, τον Γουστάβο Άιφελ. Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν αντίγραφα του πύργου του Άιφελ σε άλλες περιοχές του κόσμου. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζονται διάφορες κατασκευές του πύργου, διαφορετικού μεγέθους. Να βρεθεί ο λόγος του ύψους του πύργου στο Παρίσι ως προς το ύψος καθενός από τους υπόλοιπους.

Εκείνη τη χρονική περίοδο ήταν το ψηλότερο κτήριο στον κόσμο, με ύψος 300 m. Σήμερα παραμένει το ψηλότερο κτήριο στο Παρίσι.



Λύση:

Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Μίσιγκαν:

$300 : 6$ ή $\frac{300}{6} = \frac{50}{1}$

Άρα ο πύργος του Παρισιού είναι πενήντα φορές ψηλότερος από αυτόν του Μίσιγκαν.

Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Λας Βέγκας:

$300 : 165$ ή $\frac{300}{165} = \frac{20}{11}$

Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Τεννεσί:

$300 : 18$ ή $\frac{300}{18} = \frac{50}{3}$

Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου, ονομάζεται **κλίμακα.**

2. Δύο σημεία στον χάρτη που βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, απέχουν $10\,cm$. Να υπολογίσετε την κλίμακα του χάρτη, αν η πραγματική απόσταση των δύο σημείων είναι $2\,km$.

Λύση:
Μετατρέπουμε τις αποστάσεις στην ίδια μονάδα μέτρησης:

$$2\,km = 2 \cdot 100\,000 = 200\,000\,cm$$

$$\frac{Απόσταση\ χάρτη}{Πραγματική\ απόσταση} = \frac{10}{200\,000} = \frac{1}{20\,000}$$

Η κλίμακα του χάρτη είναι $1 : 20\,000$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται μια συνταγή για κέικ γεωγραφίας, να γράψετε:
   (α) τον λόγο της ποσότητας του λαδιού προς την ποσότητα του γάλακτος
   (β) τον λόγο της ποσότητας της ζάχαρης προς την ποσότητα του αλευριού
   (γ) τον λόγο της ποσότητας του λαδιού προς την ποσότητα της ζάχαρης.

Κέικ Γεωγραφίας
3 φλιτζάνια αλεύρι
1,5 φλιτζάνια ζάχαρη
1 φλιτζάνι λάδι
1 φλιτζάνι γάλα
5 αυγά
3 κουταλιές κακάο

2. Ένα ορθογώνιο έχει πλάτος $2\,cm$ και μήκος $6\,cm$.
   (α) Να βρείτε τον λόγο του πλάτους προς το μήκος του ορθογωνίου.
   (β) Να βρείτε τον λόγο του μήκους του ορθογωνίου προς την περίμετρό του.

3. Σε έναν καλαθοσφαιρικό αγώνα, ο καλαθοσφαιριστής A ευστόχησε στις 10 από τις 15 ελεύθερες βολές που πραγματοποίησε, ενώ ο καλαθοσφαιριστής B ευστόχησε στις 6 από τις 8 βολές. Ποιος είναι ο πιο εύστοχος από τους δύο καλαθοσφαιριστές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. Να χρησιμοποιήσετε τους λόγους $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{15}, \frac{8}{14}, \frac{2}{6}, \frac{6}{18}$ για να σχηματίσετε τέσσερις αναλογίες.

5. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω αναλογίες:

(α) $\frac{2}{5} = \frac{....}{15}$ (β) $\frac{4}{7} = \frac{16}{....}$

(γ) $\frac{15}{20} = \frac{....}{4}$ (δ) $\frac{2}{6} = \frac{...}{...}$

6. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνονται έξι διαφορετικά μοντέλα του ίδιου τρένου. Το καθένα έχει κατασκευαστεί με συγκεκριμένη κλίμακα όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα. Να βρείτε τον λόγο που αντιστοιχεί στο μικρότερο τρένο της φωτογραφίας.

Μοντέλο	Κλίμακα
Α	1 : 220
Β	1 : 160
Γ	1 : 87
Δ	1 : 64
Ε	1 : 48
ΣΤ	1 : 30

7. Ένα ζαχαροπλαστείο κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο είδος τούρτας με βάση τετράγωνο, όπως φαίνεται πιο κάτω:

(α) Να βρείτε τον λόγο της πλευράς της βάσης της τούρτας *Α* προς την πλευρά της βάσης της τούρτας *Β*.

(β) Αν γύρω από κάθε τούρτα τοποθετείται διακοσμητική κορδέλα, ποιος είναι ο λόγος του μήκους της κορδέλας της τούρτας *Α* προς το μήκος της κορδέλας της τούρτας *Β*;

(γ) Να βρείτε τον λόγο του εμβαδού της βάσης της τούρτας *Α* προς το εμβαδόν της βάσης της τούρτας *Β*.

τούρτα Α
με πλευρά 20 *cm*

τούρτα Β
με πλευρά 40 *cm*

Ιδιότητες Αναλογιών

Διερεύνηση

Δίνονται οι αριθμοί $1, 3, 4, 12$.

- ✓ Να γράψετε διαφορετικές αναλογίες με τους πιο πάνω αριθμούς στην 1η στήλη του πίνακα και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

- ✓ Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε το γινόμενο των άκρων και το γινόμενο των μέσων όρων κάθε αναλογίας.

ΑΝΑΛΟΓΙΑ		*Γινόμενο άκρων όρων*	*Γινόμενο μέσων όρων*	*Να προσθέσετε τους ηγούμενους όρους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους*
$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$		$\alpha\cdot\delta$	$\beta\cdot\gamma$	$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$
Α	$\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$			
Β	$\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$			
Γ	$\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$			
Δ	$\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$			

- ✓ Να δημιουργήσετε έναν νέο λόγο προσθέτοντας τους ηγούμενους όρους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους και να τον συγκρίνετε με τους αρχικούς λόγους κάθε αναλογίας.

- ✓ Να γράψετε μια δική σας αναλογία και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματά σας.

Μαθαίνω

- Ιδιότητες αναλογιών:

i. Αν $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\delta}} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

Παράδειγμα:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

ii. Αν $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\boldsymbol{\alpha+\gamma}}{\boldsymbol{\beta+\delta}}$

Ο λόγος που έχει ως αριθμητή το άθροισμα των ηγούμενων όρων και ως παρονομαστή το άθροισμα των επόμενων όρων μιας αναλογίας, είναι ίσος με τους λόγους της αναλογίας.

Παράδειγμα:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6}$

Παραδείγματα

1. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{2}{6}$. Να βρείτε την τιμή του x.

Λύση:

$\frac{x}{3} = \frac{2}{6}$ *Το γινόμενο των άκρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων (Ιδιότητα).*

$\Leftrightarrow 6x = 2 \cdot 3$ *Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.*

$\Leftrightarrow 6x = 6$

$\Leftrightarrow x = 1$

2. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνονται ένα εκπαιδευτικό αεροπλάνο και ένα μοντέλο που είναι πιστό αντίγραφό του. Το αεροπλάνο έχει μήκος 6,6 m, ενώ το μήκος του φτερού του είναι 8 m. Αν το μοντέλο κατασκευάστηκε με κλίμακα 1 : 6, να βρείτε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου.

Λύση:

Ισχύει: $\frac{Μήκος\ μοντέλου}{Μήκος\ αεροπλάνου} = \frac{1}{6}$

- *Συμβολίζουμε με x το μήκος του μοντέλου και αντικαθιστούμε στην πιο πάνω αναλογία:* $\frac{x}{6{,}6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6x = 1 \cdot 6{,}6$

$$\Leftrightarrow 6x = 6{,}6$$
$$\Leftrightarrow x = 6{,}6 : 6$$
$$\Leftrightarrow x = 1{,}1\ m$$

- *Συμβολίζουμε με y το μήκος του φτερού του μοντέλου και αντικαθιστούμε στην πιο πάνω αναλογία:* $\frac{y}{8} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y = 1 \cdot 8$

$$\Leftrightarrow 6y = 8$$
$$\Leftrightarrow y = 8 : 6$$
$$\Leftrightarrow y = 1{,}33\ m$$

3. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν λόγο 7 : 5 και διαφορά 40.

Λύση:

Έστω ότι ο ένας αριθμός είναι α και ο άλλος β.

Άρα,

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και $\alpha - \beta = 40$.

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5}$

Μετασχηματίζουμε την αναλογία για να προκύψουν ως ηγούμενοι οι αριθμοί α και β.

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha-\beta}{7-5} = \frac{40}{2} = 20$

Εφαρμόζω την ιδιότητα των αναλογιών.

Υπολογίζω τον αριθμό α: $\frac{\alpha}{7} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 140$

Υπολογίζω τον αριθμό β: $\frac{\beta}{5} = 20 \Leftrightarrow \beta = 100$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:
   (α) $\frac{15}{4} = \frac{105}{\nu}$ (β) $\frac{\beta-3}{16} = \frac{5}{8}$
   (γ) $\frac{3}{4} = \frac{x}{x+3}$ (δ) $\frac{2}{\omega} = \frac{5}{\omega+6}$

2. Δύο πόλεις απέχουν μεταξύ τους 45 km. Να βρείτε την απόστασή τους σε χάρτη με κλίμακα $1 : 100\,000$.

3. Ο Ανδρέας μέτρησε στον χάρτη, με κλίμακα $1 : 200\,000$, την απόσταση του σχολείου του από το σχολείο του Χάρη. Αν τα δύο σχολεία απέχουν μεταξύ τους 5 cm, να βρείτε την πραγματική τους απόσταση.

4. Οι διαστάσεις μιας φωτογραφίας είναι 6 cm μήκος και 8 cm πλάτος. Θέλουμε να μεγεθύνουμε τη φωτογραφία, διατηρώντας σταθερό τον λόγο του μήκους προς το πλάτος. Να βρείτε το μήκος της μεγέθυνσης, αν το πλάτος θα είναι 12 cm.

5. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Να υπολογίσετε την τιμή του y, ώστε να ισχύει $x + y = 64$.

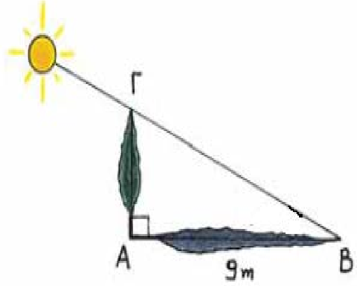
6. Ένας βιολόγος μελετά μικροοργανισμούς στο μικροσκόπιό του, το οποίο προσφέρει μεγέθυνση $250 : 1$.
   (α) Πόσα mm είναι το πραγματικό μήκος ενός μικροοργανισμού, που στο μικροσκόπιο φαίνεται ότι είναι 2 cm;
   (β) Πόσα cm θα είναι το μήκος ενός μικροοργανισμού στο μικροσκόπιο, όταν το πραγματικό του μήκος είναι 0,05 mm;

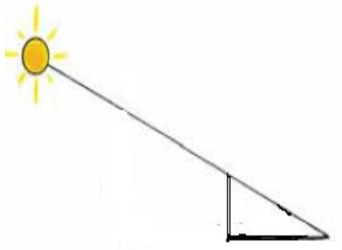
7. Ένα χρηματικό έπαθλο €150 μοιράστηκε στους πρώτους τρεις νικητές ενός διαγωνισμού, σύμφωνα με τον αριθμό των σωστών απαντήσεών τους. Ο πρώτος απάντησε σωστά σε 12 ερωτήσεις, ο δεύτερος σε 10 και ο τρίτος σε 8. Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

8. Ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια του σχολείου μας είναι $\frac{4}{5}$. Να βρείτε τον αριθμό των αγοριών και τον αριθμό των κοριτσιών σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) Αν το σύνολο των παιδιών του σχολείου είναι 360.
   (β) Αν τα αγόρια είναι 50 λιγότερα από τα κορίτσια.

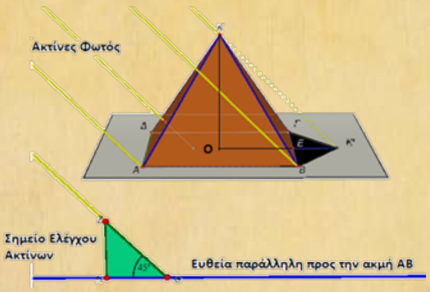
9. Τέσσερα άτομα, ο Δημήτρης, ο Άλκης, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος, δούλεψαν σε μια εργολαβία και χρέωσαν €1600. Να βρείτε πόσες ώρες δούλεψε ο Δημήτρης, αν γνωρίζετε ότι ο Άλκης δούλεψε 6 ώρες, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος από 8 ώρες και ότι ο Δημήτρης πήρε €720 (θεωρούμε ότι τα τέσσερα αυτά άτομα αμείβονται το ίδιο για κάθε μία ώρα που δουλεύουν).

10. Ένας εργάτης του δήμου για να υπολογίσει το ύψος ενός κυπαρισσιού, τοποθέτησε ένα κοντάρι μήκους $1\,m$ στο έδαφος και μέτρησε τη σκιά του. Αν τη συγκεκριμένη στιγμή, η σκιά του κονταριού ήταν $1{,}5\,m$ και η σκιά του δέντρου ήταν $9\,m$, να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος του κυπαρισσιού.





Ο αρχαίος Έλληνας ιστορικός Διογένης ο Λαέρτιος γράφει ότι ο Θαλής, κατά τη διάρκεια της παραμονής του στην Αίγυπτο, κατάφερε να μετρήσει το ύψος της τετραγωνικής Πυραμίδας του Χέοπα με τη βοήθεια της σκιάς της. Ο Θαλής πραγματοποίησε τη μέτρηση, παρατηρώντας το εξής: αν κάποια μέρα η σκιά του γινόταν ίση με το ύψος του, τότε το ίδιο θα συνέβαινε και με τη σκιά του ύψους της πυραμίδας. Άρα, το μεσημέρι μιας τέτοιας μέρας όπου η σκιά του Θαλή γινόταν ίση με το ύψος του, θα είχαμε, $OK' \perp B\Gamma$.



$$Ύψος\ πυραμίδας = KO = OK' = OE + EK' = \frac{AB}{2} + EK',$$

Την εποχή της κατασκευής της, το 2560 $\pi.X.$, η πυραμίδα του Χέοπα είχε ύψος 146,6 μέτρα. Για 3800 χρόνια ήταν το ψηλότερο μνημείο στον κόσμο. Σήμερα γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 138,8 μέτρα, περίπου, αφού εκτός από καθίζηση έχει υποστεί και φθορές.

Στο βιβλίο – μυθιστόρημα *Το Θεώρημα του Παπαγάλου*, του Γάλλου συγγραφέα Denis Guedj, θα βρείτε μια ωραιότατη περιγραφή του πιο πάνω γεγονότος.

Ποσοστά

Εξερεύνηση

Ένα από τα πιο δημοφιλή μηνύματα που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο είναι ένα φιλμάκι που παρουσιάζει πώς θα ήταν η γη, αν ήταν ένα χωριό 100 μόνο κατοίκων.
Η αρχική ιδέα ήταν της δημοσιογράφου και καθηγήτριας Πανεπιστημίου Donella Meadows, η οποία παρουσίασε τη μικρογραφία αυτή του κόσμου σε άρθρο της στο *The Global Citizen*, το 1990. Από τότε οι αλλαγές που σημειώθηκαν κατά τα τελευταία χρόνια είναι αξιοσημείωτες. Ο παγκόσμιος πληθυσμός έχει ήδη ξεπεράσει τα 7 000 000 000. Τα δεδομένα τώρα έχουν ως εξής:

Αν η γη ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων:

- *Εξήντα θα ήταν Ασιάτες (*37 *θα κατάγονταν από την Ινδία και την Κίνα),* 15 *θα ήταν Αφρικανοί,* 11 *θα ήταν Ευρωπαίοι και* 14 *από τη Βόρεια και Νότια Αμερική.*
- *Είκοσι έξι θα ήταν παιδιά και* 74 *ενήλικες από τους οποίους οι 8 θα ήταν πάνω από* 65 *χρονών.*
- *Ογδόντα τρεις μόνο θα μπορούσαν να γράφουν και να διαβάζουν ενώ* 17 *θα ήταν αναλφάβητοι.*
- *Ένας θα πέθαινε από την πείνα και άλλοι* 15 *θα υποσιτίζονταν, τη στιγμή που* 21 *θα ήταν παχύσαρκοι.*
- *Δεκατρείς δεν θα είχαν πρόσβαση σε καθαρό νερό.*

Sources: 2012 - Fritz Erickson, Provost and Vice President for Academic Affairs, Ferris State University (Formerly Dean of Professional and Graduate Studies, University of Wisconsin - Green Bay) and John A. Vonk, University of Northern Colorado, 2006; Returning Peace Corps Volunteers of Madison Wisconsin, *Unheard Voices: Celebrating Cultures from the Developing World*, 1992; Donella H. Meadows, *The Global Citizen*, May 31, 1990.

- ✓ Να σχολιάσετε γιατί το πιο πάνω άρθρο εντυπωσίασε και συνεχίζει να εντυπωσιάζει για τον τρόπο που επέλεξε η Meadows να παρουσιάσει τα δημογραφικά δεδομένα του πληθυσμού.

- ✓ Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσατε να παρουσιάσετε τα δημογραφικά δεδομένα της Κύπρου που είχαν συλλεγεί κατά την απογραφή πληθυσμού του 2011 (Στατιστική Υπηρεσία, http://www.mof.gov.cy/cystat) με παρόμοιο τρόπο.

Αν η Κύπρος ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων, τότε …

Χρησιμοποιούμε επίσης το ποσοστό α ‰ που διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$.

Μαθαίνω

- Το σύμβολο $\boldsymbol{\alpha}\%$ ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με τον λόγο $\frac{\alpha}{100}$.

Παραδείγματα

1. Η κατανάλωση του ηλεκτρικού ρεύματος μιας οικίας χρεώνεται με βάση τον διπλανό πίνακα. Επιπλέον ο καταναλωτής χρεώνεται με μια σταθερή επιβάρυνση €4,85 και στη συνέχεια με επιπλέον 18% Φ.Π.Α. στο σύνολο των χρεώσεων. Να υπολογίσετε πόσα θα πληρώσει ένας καταναλωτής που είχε συνολική κατανάλωση 385 KW.

Κατανάλωση σε KW	Χρέωση ανά KW
0 – 120	προς €0,23
120 – 320	προς €0,24
320 – 400	προς €0,25
400 – 900	προς €0,26
900 και άνω	προς €0,27

Λύση:

Υπολογίζουμε τη χρέωση ως εξής:

Κατανάλωση	Χρέωση
Για τις πρώτες 120 KW	$120 \cdot 0{,}23 = 27{,}60$
Για τις επόμενες 200 KW	$200 \cdot 0{,}24 = 48{,}00$
Οι υπόλοιπες 65 KW	$65 \cdot 0{,}25 = 16{,}25$
Σταθερή επιβάρυνση	4,85
ΣΥΝΟΛΟ	**96, 70**

Α΄ τρόπος:

Στη χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. , δηλαδή το 18% *του* €96,70 $\frac{18}{100} \cdot 96{,}70 = 17{,}41$. *Άρα, το συνολικό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής είναι:*

$$96{,}70 + 17{,}41 = 114{,}11$$

Β΄ τρόπος:

Στη χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. 18%, *δηλαδή σε μια χρέωση* €100, *θα προστεθεί* €18. *Άρα, η συνολική χρέωση θα είναι* €118.

Άρα,

Χρέωση (σε €)	*Φ.Π.Α. (σε €)*	*Συνολική χρέωση (σε €)*
100	18	118
96,70		x

$$\frac{100}{96{,}70} = \frac{118}{x}$$

$$\Leftrightarrow 100x = 118 \cdot 96{,}70 \qquad \Leftrightarrow x = \frac{118 \cdot 96{,}70}{100} \qquad \Leftrightarrow x = 114{,}11$$

Δραστηριότητες

1. Σε ένα γυμνάσιο το 25% των μαθητών φοιτούν στην Α΄ Γυμνασίου και το 35% στη Β΄ Γυμνασίου. Πόσοι είναι οι μαθητές της Γ΄ τάξης, αν όλοι οι μαθητές είναι 480;

2. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσόν των €2300 σε γραμμάτιο ενός χρόνου με επιτόκιο 4%. Πόσα θα εισπράξει με την εξαργύρωση του γραμματίου στο τέλος του χρόνου;

Επιτόκιο είναι το ποσοστό % που η τράπεζα χρεώνει στον δανεισμό ή πιστώνει στις καταθέσεις.

3. Σε έρευνα της τροχαίας σε 450 αυτοκίνητα οι 90 οδηγοί δεν φορούσαν ζώνη και σε 280 μοτοσυκλέτες το 25% των οδηγών δεν φορούσε κράνος.

   (α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών των αυτοκινήτων που φορούσε ζώνη ασφαλείας

   (β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μοτοσυκλετιστών που δεν φορούσαν κράνος.

   (γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών που παρανομούσαν επί του συνόλου των οδηγών.

4. Ο κύριος Μανώλης πήρε αύξηση στον μισθό του. Να υπολογίσετε το ποσοστό αύξησης του μισθού του αν ο μισθός του από €900 έγινε €990;

5. Μια κτηματική εταιρεία αγόρασε ένα διατηρητέο σπίτι για €90000. Πλήρωσε επιπλέον €40000 για την ανακαίνισή του. Το κράτος επιχορηγεί το συνολικό κόστος με 35%. Πόσα χρήματα επέστρεψε το κράτος στην εταιρεία;

6. Ένα κατάστημα προσφέρει 25% έκπτωση στην αρχική τιμή σε όλα τα προϊόντα του. Να υπολογίσετε την αρχική/τελική τιμή των πιο κάτω προϊόντων:

Αρχική τιμή: €750
Τελική τιμή: ……..

Αρχική τιμή: ……..
Τελική τιμή: €412,5

Αρχική τιμή: ……..
Τελική τιμή: €210

Αρχική τιμή: €7
Τελική τιμή: ……..

7. Τα έξοδα μιας οικογένειας κατανέμονται όπως φαίνεται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.
   (α) Αν η οικογένεια ξοδεύει €640 για διατροφή, να υπολογίσετε πόσα χρήματα ξοδεύει για τις σπουδές των παιδιών τους.
   (β) Να βρείτε τον λόγο των χρημάτων που ξοδεύει για ενοίκιο προς τα χρήματα που ξοδεύει για διασκέδαση.

8. Σε μία πόλη οι γεννήσεις φέτος ανήλθαν στο 3% του πληθυσμού, ενώ οι θάνατοι στο 1%. Αν ο πληθυσμός στο τέλος της χρονιάς αυξήθηκε κατά 400 άτομα, να βρείτε πόσους κατοίκους είχε η πόλη στην αρχή της χρονιάς.

9. Τον Απρίλιο διοργανώθηκε μία εκδρομή στην Αθήνα, της οποίας τα κέρδη δόθηκαν για ενίσχυση του ταμείου του Ραδιομαραθώνιου. Το κανονικό εισιτήριο ήταν €400, ενώ για τους συνταξιούχους ήταν €320 και για τα παιδιά €250.
   (α) Να βρείτε τι ποσοστό έκπτωσης έγινε στο εισιτήριο των συνταξιούχων.
   (β) Συνολικά ταξίδεψαν 50 άτομα, από τα οποία το 20% ήταν συνταξιούχοι. Να βρείτε πόσοι συνταξιούχοι και πόσα παιδιά ταξίδεψαν, αν γνωρίζετε ότι εισπράχθηκε συνολικά από όλους τους επιβάτες το ποσό των €17700.

10. Τρεις αλυσίδες ηλεκτρικών ειδών έχουν ανακοινώσει έκπτωση για ένα συγκεκριμένο προϊόν όπως φαίνεται πιο κάτω:

Εταιρεία Α

Α΄ φάση:
10% έκπτωση

Β΄ φάση:
Επιπλέον 25% έκπτωση
στην ήδη μειωμένη τιμή της
Α΄ φάσης των εκπτώσεων

Εταιρεία Β

35% έκπτωση

Εταιρεία Γ

Α΄ φάση:
25% έκπτωση

Β΄ φάση:
Επιπλέον 10% έκπτωση
στην ήδη μειωμένη τιμή της
Α΄ φάσης των εκπτώσεων.

Η Ηλιάνα θέλει να αγοράσει το συγκεκριμένο προϊόν στη χαμηλότερη τιμή. Ποια εταιρεία πρέπει να προτιμήσει και γιατί;

11. Ο Μιχάλης διαθέτει €350 για να αγοράσει μια τηλεόραση. Στην αναγραφόμενη τιμή της τηλεόρασης προστίθεται 18% Φ.Π.Α.. Να βρείτε μέχρι ποιο ποσό πρέπει να είναι η αναγραφόμενη τιμή της τηλεόρασης, ώστε το ποσό που θα πληρώσει να μην ξεπεράσει το ποσό που διαθέτει.

12. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσό των €22000 και μετά από 1 χρόνο το ποσό αυτό έγινε με τους τόκους του €22880. Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε το συγκεκριμένο κεφάλαιο;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε την τιμή του x στις πιο κάτω αναλογίες:

   (α) $\frac{x}{4}=\frac{5}{20}$ (β) $\frac{x}{3}=\frac{27}{x}$

   (γ) $\frac{4}{x+2}=\frac{3}{x-2}$ (δ) $\frac{x}{x-3}=\frac{2}{3}$

2. Ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο κατασκευάστηκε με κλίμακα $1:100$. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου δωματίου στο σχέδιο είναι $3\,cm$ πλάτος και $5\,cm$ μήκος, να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του δωματίου.

3. Δίνεται η αναλογία $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{5}$. Να βρείτε τους λόγους:

   (α) $\frac{\alpha}{\beta}$ (β) $\frac{\beta}{\alpha}$

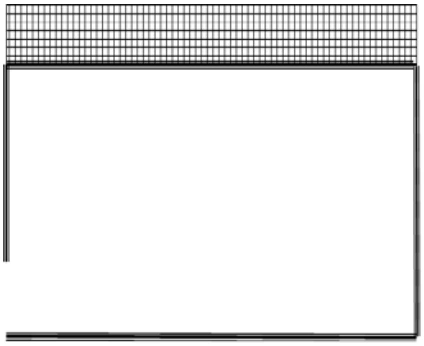
4. Λόγω περιορισμού των εργασιών του, ένα εργοστάσιο μείωσε τον αριθμό των υπαλλήλων του από 180 σε 144. Να βρείτε το ποσοστό της μείωσης των υπαλλήλων του εργοστασίου.

5. Σε μια εταιρεία ο λόγος των ανδρών υπαλλήλων προς τις γυναίκες είναι $5:4$. Αν οι άνδρες είναι 20 περισσότεροι από τις γυναίκες, να βρείτε τον αριθμό των γυναικών.

6. Ο κύριος Κώστας αγόρασε νέα μηχανήματα για τη βιοτεχνία του. Στην αξία των εμπορευμάτων προστέθηκε 18% Φ.Π.Α. Ποια ήταν η τιμή των εμπορευμάτων, αν ο κύριος Κώστας πλήρωσε συνολικά €2478;

7. Δίνονται οι αριθμοί $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$.
   (α) Τι ποσοστό από τους πιο πάνω αριθμούς είναι τετράγωνοι αριθμοί;
   (β) Τι ποσοστό των τετράγωνων αριθμών είναι άρτιοι;

8. Να επιλέξετε τη θέση που θα τοποθετήσετε τα έπιπλα στο δωμάτιό σας και ακολούθως να τα σχεδιάσετε στο αρχιτεκτονικό σχέδιο του δωματίου, που είναι σχεδιασμένο με κλίμακα $1:100$. Οι διαστάσεις των επίπλων είναι:
   - **Κρεβάτι** $2{,}20\ m\ x\ 1{,}10\ m$
   - **Κομοδίνο** $65\ cm\ x\ 65\ cm$
   - **Γραφείο** $1{,}20\ m\ x\ 0{,}75\ m$



9. Το σωματείο της γειτονιάς εξέδωσε και πώλησε λαχνούς των €100 για την ανέγερση του οικήματος του. Οι κάτοχοι των λαχνών συμμετέχουν σε κλήρωση με μεγάλο έπαθλο €5000 και άλλα πλούσια δώρα. Τρεις φίλοι έδωσαν τα ποσά €20, €30 και €50 αντίστοιχα και αγόρασαν έναν λαχνό των €100. Να υπολογίσετε τι ποσό πρέπει να πάρει ο καθένας τους αν κερδίσουν το μεγάλο έπαθλο.

10. Οι υπάλληλοι που δουλεύουν σε μια υπεραγορά δικαιούνται έκπτωσή 20% στις αγορές τους στα είδη του αρτοποιείου. Πόσα θα πληρώσει ένας υπάλληλος της υπεραγοράς, αν αγόρασε είδη αρτοποιείου αξίας €32,50;

11. Ένας έμπορος αγόρασε 20 στερεοφωνικά προς €240 το ένα και πλήρωσε 10% της συνολικής αξίας τους για έξοδα μεταφοράς. Θέλει να τα πουλήσει με 20% κέρδος. Πόσα θα εισπράξει συνολικά;

12. Τέσσερις τεχνίτες, ο Άρης, ο Χάρης, ο Μάνος και ο Βάσος πήραν από μια εργασία €5625. Ο Άρης ως εργοδηγός πήρε το 20% του ποσού και τα υπόλοιπα μοιράστηκαν ανάλογα προς τις ημέρες εργασίας των άλλων τριών. Αν ο Χάρης εργάστηκε 15 ημέρες, ο Μάνος 12 ημέρες και ο Βάσος 18 ημέρες, πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

13. Μια χορηγία €36000 του Δήμου θα μοιραστεί στα σχολεία της περιφέρειας, ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών τους. Το A έχει 300, το B 350 και το Γ 550 παιδιά. Το μεγαλύτερο σχολείο αποφάσισε να δωρίσει το 20% των χρημάτων που θα πάρει σε ένα σχολείο της Κένυας. Να υπολογίσετε τι ποσό θα κρατήσει το σχολείο.

14. Στις τελευταίες δημοτικές εκλογές από τα 3000 άτομα που ήταν εγγεγραμμένα στους εκλογικούς καταλόγους μιας κοινότητας, ψήφισαν το 85%. Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε ο εκλεγμένος δήμαρχος, αν τον ψήφισε το 60% των ατόμων που ψήφισαν.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Το Δημοτικό Συμβούλιο της πόλης, έχει εγκαταστήσει στην είσοδο της πόλης μια πινακίδα που καλωσορίζει τον επισκέπτη και δείχνει το ποσοστό των οδηγών που οδηγούν εντός του ορίου ταχύτητας.
   - (α) Γιατί νομίζετε ότι το συμβούλιο χρησιμοποίησε αυτό τον τρόπο για να αναπτύξει την οδική συνείδηση; Γιατί επέλεξαν ο πίνακας να δείχνει το ποσοστό των οδηγών που τηρούν το όριο και όχι αυτών που παρανομούν;
   - (β) Πώς θα μπορούσε να περιγραφεί, χρησιμοποιώντας μικρότερους αριθμούς, το πλήθος των οδηγών που τηρούν το όριο ταχύτητας σε σχέση με το συνολικό πλήθος των οδηγών που πέρασαν από το σημείο;
   - (γ) Υποθέτουμε ότι το επόμενο αυτοκίνητο που περνά από την κάμερα τρέχει με μεγαλύτερη ταχύτητα από την επιτρεπόμενη. Το ποσοστό θα αυξηθεί ή θα μειωθεί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Η Άννα είχε 10 ψηφιακούς δίσκους στη συλλογή της και η Ραφαέλα 16. Η Άννα αγόρασε x ψηφιακούς δίσκους και η Ραφαέλα y. Να βρείτε δύο δυνατές τιμές για τα x και y, αν γνωρίζουμε ότι ο λόγος των ψηφιακών δίσκων της Άννας προς τους δίσκους της Ραφαέλας παρέμεινε σταθερός. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

3. Σε μια ισορροπημένη εφηβική διατροφή, η αναλογία υδατανθράκων προς πρωτεΐνες πρέπει να είναι $2 : 3$, ενώ η αναλογία λιπών προς υδατάνθρακες πρέπει να είναι $1 : 4$. Κάθε γραμμάριο λίπους είναι 10 θερμίδες, κάθε γραμμάριο υδατανθράκων είναι 4 θερμίδες και κάθε γραμμάριο πρωτεΐνης είναι 4 θερμίδες. Αν ένας έφηβος θέλει να παίρνει 2500 θερμίδες την ημέρα, πως θα φτιάξει το διαιτολόγιό του;

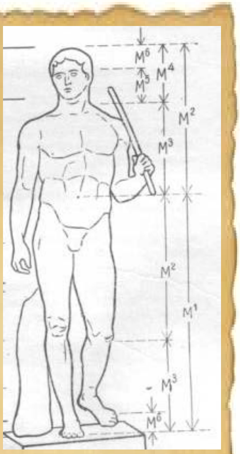
4. Η καρέκλα $Hill\ House\ 1$ κατασκευάστηκε το 1903 και θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα στην ιστορία των επίπλων. Η μινιατούρα της καρέκλας αυτής έχει ύψος $23{,}4\ cm$, βάθος $6{,}1\ cm$ και πλάτος $6{,}7\ cm$. Για την κατασκευή της χρησιμοποιήθηκε κλίμακα $1 : 6$.

(α) Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις της καρέκλας $Hill\ House$ 1.

(β) Μια άλλη μινιατούρα της ίδιας καρέκλας κατασκευάστηκε από άλλο εργοστάσιο αρχικά με κλίμακα 1 : 2. Στη συνέχεια το εργοστάσιο χρησιμοποίησε την ίδια κλίμακα, για να φτιάξει μοντέλο της πρώτης μινιατούρας. Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε τρεις φορές. Να συγκρίνετε τις διαστάσεις του τελευταίου μοντέλου της καρέκλας που κατασκεύασε το εργοστάσιο αυτό με τη μινιατούρα που κατασκεύασε το πρώτο εργοστάσιο και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

(γ) Να βρείτε την κλίμακα με την οποία κατασκευάστηκε το τρίτο μοντέλο της καρέκλας.

5. Να μελετήσετε τη χρυσή τομή.



Οι Αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος από τον $5^{ο}$ αιώνα π.Χ.. Ένας συγκεκριμένος λόγος, ο λόγος της χρυσής τομής 1,618 : 1, είναι η σχέση που συνδέει όλα σχεδόν τα μέλη του ιδανικού σώματος π.χ. Μ1 : Μ2, Μ2 : Μ3, Μ3 : Μ4 κ.ο.κ. Οι αρχαίοι γλύπτες, έφτιαχναν τα αγάλματά τους τηρώντας τις αναλογίες της χρυσής τομής. Αργότερα με το θέμα των ιδανικών αναλογιών, ασχολήθηκε και ο Leonardo Da Vinci.

Ο «Δορυφόρος» του Πολύκλειτου
(ρωμαϊκό μαρμάρινο αντίγραφο του χάλκινου αυθεντικού έργου).

Η χρυσή τομή φ ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών $\frac{α}{β}$ όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{α+β}{α}$ που ισούται περίπου με 1,618. Πιστεύεται ότι ο Φειδίας ήταν ο πρώτος που την εφάρμοσε στα γλυπτά του. Γι’ αυτό, στον αριθμό που εκφράζει αυτή την αναλογία δόθηκε στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα από τον Mark Barr, έναν Αμερικανό μαθηματικό, η ονομασία, από το πρώτο γράμμα του ονόματος του γλύπτη. Θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και για τον λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, τόσο στην αρχαία Ελλάδα όσο και κατά την Αναγέννηση.

ΕΝΟΤΗΤΑ

11

Στατιστική - Πιθανότητες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να κατανοούμε τις έννοιες πληθυσμός και μεταβλητή και να διακρίνουμε τα διάφορα είδη μεταβλητών.
- Να διαβάζουμε, να ερμηνεύουμε και να αντλούμε πληροφορίες από γραφικές παραστάσεις.
- Να ορίζουμε τι είναι συχνότητα, να κατασκευάζουμε και να ερμηνεύουμε τον πίνακα συχνοτήτων.
- Να κατασκευάζουμε ραβδογράμματα, ιστογράμματα, και κυκλικά διαγράμματα και να επιλέγουμε μια κατάλληλη γραφική παράσταση για την παρουσίαση δεδομένων.
- Να αναγνωρίζουμε και να περιγράφουμε τι είναι πείραμα τύχης και ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματά του.
- Να υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μεταβλητές – Είδη Μεταβλητών

Εξερεύνηση

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΓΕΩΡΓΙΑΣ, ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ
ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ

ΜΗΝΙΑΙΟ ΔΕΛΤΙΟ ΚΑΙΡΟΥ

Δεκέμβριος **2012**

Γενική καιρική κατάσταση: Ο καιρός τον Δεκέμβριο ήταν σχετικά υγρός και οι θερμοκρασίες κυμάνθηκαν γύρω στις κανονικές. Ασταθείς καιρικές συνθήκες επικράτησαν στις περιόδους $7-9$, $16-18$, $20-25$ και $30-31$ του μήνα, που προκάλεσαν τοπικές βροχές, μεμονωμένες καταιγίδες, χαλάζι και χιονόπτωση. Η μέση θερμοκρασία ήταν περίπου 0,5 ℃ πιο πάνω από την κανονική.

Βροχόπτωση: Σύμφωνα με προκαταρκτικούς υπολογισμούς η μέση βροχόπτωση του Δεκεμβρίου ήταν 116.7 mm ή 111% της κανονικής. Η μηνιαία βροχόπτωση ήταν πιο πάνω από την κανονική στις πλείστες περιοχές και γενικά κυμάνθηκε μεταξύ 63% και 154% της κανονικής. Χαλάζι σημειώθηκε στις $8, 9$ και 23 του μήνα ενώ χιονόπτωση στις περιόδους $8-9$, $22-25$ και $30-31$ του μήνα.

Θερμοκρασία: Η μέση θερμοκρασία του μήνα ήταν περίπου 0.5 ℃ πιο πάνω από την κανονική. Οι μέσες ημερήσιες θερμοκρασίες ήταν πιο πάνω από τις κανονικές στις πλείστες ημέρες του μήνα εκτός από τις περιόδους $8-12$ και $24-31$ του μήνα όπου κυμάνθηκαν πιο κάτω ή γύρω από τις κανονικές. Εξαιρετικά ψηλές θερμοκρασίες σημειώθηκαν την περίοδο $11-22$ του μήνα, όπου οι μέγιστες και οι ελάχιστες θερμοκρασίες ήταν 2 με 9 $°C$ πιο πάνω από τις κανονικές. Εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες σημειώθηκαν στις 10 και στην περίοδο $25-30$ του μήνα, …

✓ Να μελετήσετε το πιο πάνω δελτίο καιρού και να σχολιάσετε ποια στοιχεία μεταβάλλονται.

Διερεύνηση

Η Απογραφή Πληθυσμού 2011 διενεργήθηκε στην Κύπρο, από τη Στατιστική Υπηρεσία του Υπουργείου Οικονομικών. Η προηγούμενη απογραφή έγινε το 2001. Εκτός από την αριθμητική καταγραφή του πληθυσμού, η απογραφή περιλάμβανε και ερωτηματολόγια που σκοπό είχαν τη συλλογή πληροφοριών για τη δημογραφική και κοινωνική κατάσταση της χώρας, την οικονομική και οικογενειακή κατάσταση του πληθυσμού, το επίπεδο μόρφωσης και την ποιότητα ζωής.

	Απογραφή 2001			Απογραφή 2011		
Επαρχία	**Αστική**	**Αγροτική**	**Σύνολο**	**Αστική**	**Αγροτική**	**Σύνολο**
Λευκωσία	200 686	72 956	273 642	238 547	87 209	325 756
Αμμόχωστος		37 738	37 738		46 452	46 452
Λάρνακα	69 187	46 081	115 268	84 511	58 856	143 367
Λεμεσός	154 151	42 402	196 553	179 937	55 119	235 056
Πάφος	45 965	20 399	66 364	62 098	26 168	88 266
Σύνολο	**469 989**	**219 576**	**689 565**	**565 093**	**273 804**	**838 897**

- ✓ Να αναγνωρίσετε τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που καταγράφονται στον πιο πάνω πίνακα και τις τιμές που παίρνουν.
- ✓ Είναι αριθμητικές οι τιμές τους ή υπάρχουν χαρακτηριστικά που παίρνουν μη αριθμητικές τιμές;
- ✓ Ποια άλλα χαρακτηριστικά του πληθυσμού μπορεί να εξέτασε η Στατιστική Υπηρεσία για να πετύχει τον πιο πάνω σκοπό;
- ✓ Να υποδείξετε δύο χαρακτηριστικά που παίρνουν αριθμητικές τιμές και δύο άλλα που παίρνουν μη αριθμητικές τιμές.

Μαθαίνω

- **Στατιστική** είναι ο κλάδος των μαθηματικών που εμβαθύνει σε μεθόδους συλλογής δεδομένων, οργάνωσης, παρουσίασης των δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων από τα δεδομένα αυτά.

- Τα δεδομένα που συλλέγονται αφορούν ένα συγκεκριμένο σύνολο αναφοράς, το οποίο ονομάζεται **πληθυσμός**.

- Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**. Οι τιμές των μεταβλητών που καταγράφουμε για καθένα από τα μέλη του πληθυσμού, όταν συλλέγουμε δεδομένα ονομάζονται και **παρατηρήσεις**.

- Οι μεταβλητές διακρίνονται, ανάλογα με το είδος των τιμών που μπορούν να πάρουν, σε **ποιοτικές** και σε **ποσοτικές.**
  - Οι **ποιοτικές** μεταβλητές παίρνουν τιμές που δεν είναι αριθμοί και ταξινομούν τον πληθυσμό σε κατηγορίες.
    Παραδείγματα:
    φύλο, θρήσκευμα, επίπεδο σπουδών, ομάδα αίματος, οικογενειακή κατάσταση, ποδοσφαιρική ομάδα που υποστηρίζει κάποιος κ.λπ.
  - Οι **ποσοτικές** μεταβλητές παίρνουν μόνο αριθμητικές τιμές.
    Παραδείγματα:
    αριθμός παιδιών σε μια οικογένεια, αριθμός υπολογιστών που έχει μια οικογένεια στο σπίτι, ύψος, βάρος, ταχύτητα, χρόνος προπόνησης ενός ποδηλάτη, κ.λπ..

Παραδείγματα

1. Η τροχαία θέλει να κάνει μια έρευνα για τα τροχαία δυστυχήματα που σημειώθηκαν το 2011 στον αυτοκινητόδρομο Λευκωσίας – Λεμεσού. Θέλει να εξετάσει τις πιο κάτω μεταβλητές:
   - *τον τύπο του οχήματος που έχει εμπλακεί στο δυστύχημα,*
   - *τον χρόνο που σημειώθηκε το δυστύχημα,*
   - *την ταχύτητα του οχήματος,*
   - *τον αριθμό των τραυματιών,*
   - *την κατάσταση της υγείας κάθε τραυματία,*
   - *τους βαθμούς ποινής του οδηγού,*

   Να χαρακτηρίσετε το είδος καθεμιάς από τις μεταβλητές.

Λύση:
Οι μεταβλητές μπορούν να ταξινομηθούν ως προς το είδος τους με κριτήριο το αν παίρνουν αριθμητικές τιμές ή όχι.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	
Ποιοτικές	Ποσοτικές
Ο τύπος του οχήματος. *Η κατάσταση της υγείας κάθε τραυματία.*	*Ο χρόνος που σημειώθηκε το δυστύχημα.* *Η ταχύτητα των οχημάτων.* *Ο αριθμός των τραυματιών.* *Οι βαθμοί ποινής του οδηγού.*

Δραστηριότητες

1. Θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση των 18 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά για το Β΄ τετράμηνο. Αν οι βαθμολογίες τους είναι:
   $A, B, B, A, B, B, \Gamma, A, A, E, \Delta, A, A, \Gamma, B, B, \Gamma, A$ να βρείτε:
   (α) ποιος είναι ο πληθυσμός,
   (β) ποια είναι η μεταβλητή,
   (γ) το είδος της μεταβλητής.

2. Να χαρακτηρίσετε τις μεταβλητές, σύμφωνα με το είδος τους.
   (α) *Ο αριθμός των μαθητών ανά τμήμα ενός σχολείου.*
   (β) *Η απόσταση που διανύει ένα όχημα.*
   (γ) *Ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών.*
   (δ) *Ο αριθμός απουσιών.*
   (ε) *Η ποιότητα του περιεχομένου ενός βιβλίου.*

3. Για τη μελέτη της τροχαίας κίνησης συγκεντρώθηκαν διάφορα στοιχεία από διερχόμενα αυτοκίνητα σε κάποιο κομβικό σημείο της πόλης. Μερικά από τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Γράμματα Πινακίδας Εγγραφής	Χρώμα	Ταχύτητα Km/h	Αριθμός Επιβατών	Φορτηγό / Ημιφορτηγό
ΚΚΗ	Κόκκινο	43	1	ΟΧΙ
WS	Άσπρο	37	0	ΟΧΙ
ΕΑΑ	Γκρίζο	42	4	ΟΧΙ
DHG	Ασημί	48	3	ΟΧΙ
ΚΒΕ	Κόκκινο	35	2	ΝΑΙ
HKF	Ασημί	39	0	ΟΧΙ
KFC	Άσπρο	40	1	ΝΑΙ
YW	Πράσινο	27	3	ΟΧΙ
ST	Μαύρο	36	2	ΟΧΙ
ΗΤΡ	Γκρίζο	47	2	ΟΧΙ

   (α) Να εξετάσετε το είδος των μεταβλητών της πιο πάνω έρευνας.
   (β) Ποια ήταν η ταχύτητα του μαύρου αυτοκινήτου;
   (γ) Πόσα ήταν τα φορτηγά και ημιφορτηγά αυτοκίνητα;
   (δ) Τι χρώμα είχε το αυτοκίνητο με τη μεγαλύτερη ταχύτητα;
   (ε) Ποια ήταν η ταχύτητα του αυτοκινήτου με τους περισσότερους επιβάτες;

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Η υπηκοότητα του κάθε μαθητή σε ένα τμήμα είναι ποιοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Ο αριθμός των ανθρώπων που παρακολουθούν μια συγκεκριμένη τηλεοπτική εκπομπή είναι ποσοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Γ΄ Λυκείου είναι ποσοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Η Στατιστική Υπηρεσία στις εκδόσεις «Στατιστικές Εκπαίδευσης» που δημοσιεύει, παρουσίασε τον πιο κάτω πίνακα που καταγράφει το ανώτατο μορφωτικό επίπεδο των ατόμων ηλικίας άνω των 20 ετών. Να εντοπίσετε τις μεταβλητές και να τις χαρακτηρίσετε ως προς το είδος τους.

Ανώτατο μορφωτικό επίπεδο ατόμων ηλικίας 20 ετών και άνω (%) *

	2010	2007	2004	2001	1997	1992
Δεν φοίτησαν / τέλειωσαν το Δημοτικό						
Άντρες	*4%*	*4%*	*6%*	*6%*	*10%*	*10%*
Γυναίκες	*9%*	*9%*	*13%*	*13%*	*19%*	*21%*
Δημοτική εκπαίδευση						
Άντρες	*15%*	*18%*	*21%*	*22%*	*29%*	*29%*
Γυναίκες	*17%*	*18%*	*20%*	*23%*	*28%*	*29%*
Μέση εκπαίδευση						
Άντρες	*51%*	*50%*	*47%*	*47%*	*44%*	*42%*
Γυναίκες	*42%*	*44%*	*43%*	*40%*	*37%*	*34%*
Τριτοβάθμια εκπαίδευση						
Άντρες	*30%*	*28%*	*26%*	*25%*	*17%*	*19%*
Γυναίκες	*32%*	*29%*	*24%*	*24%*	*16%*	*16%*

* Τα έτη 1992 και 2001 αναφέρονται στις απογραφές πληθυσμού, ενώ τα υπόλοιπα χρόνια σε δειγματοληπτικές έρευνες.

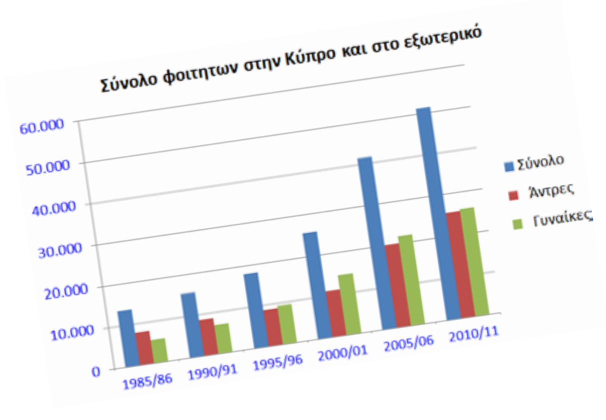
Μέθοδοι Παρουσίασης Στατιστικών Δεδομένων

Εξερεύνηση

Χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης προτιμούν κατά κύριο λόγο οι Κύπριοι φοιτητές, που σπουδάζουν στο εξωτερικό, όπως προκύπτει από τα στοιχεία της Κυπριακής Στατιστικής Υπηρεσίας (ΚΣΥ). Το ακαδημαϊκό έτος 2010 – 11, οι Κύπριοι φοιτητές στο εξωτερικό αριθμούσαν συνολικά 19199 άτομα. Το 97,5% των φοιτητών σπούδαζαν σε ιδρύματα χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης και το υπόλοιπο 2,5% σε χώρες εκτός Ε.Ε.. Από αυτούς οι άνδρες ήταν 9247 ενώ οι γυναίκες 9952. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το 1985 – 86 το ποσοστό των γυναικών ήταν μόνο 39%.

Από τα στοιχεία της ΚΣΥ προκύπτει τα τελευταία χρόνια αυξητική τάση στους Κυπρίους, που μένουν για σπουδές στη χώρα τους, ως αποτέλεσμα της πανεπιστημιακής ανάπτυξης της χώρας μας. Το ακαδημαϊκό έτος 2010 – 11 ο συνολικός αριθμός των φοιτητών που σπούδαζαν στα ακαδημαϊκά ιδρύματα της Κύπρου ανήλθε στις 32118, εκ των οποίων οι 22092 ήταν κυπριακής καταγωγής και οι υπόλοιποι …

✓ Γιατί νομίζετε ό δημοσιογράφος του πιο πάνω άρθρου επέλεξε να παρουσιάσει τα δεδομένα της ΚΣΥ με τα πιο πάνω διαγράμματα;

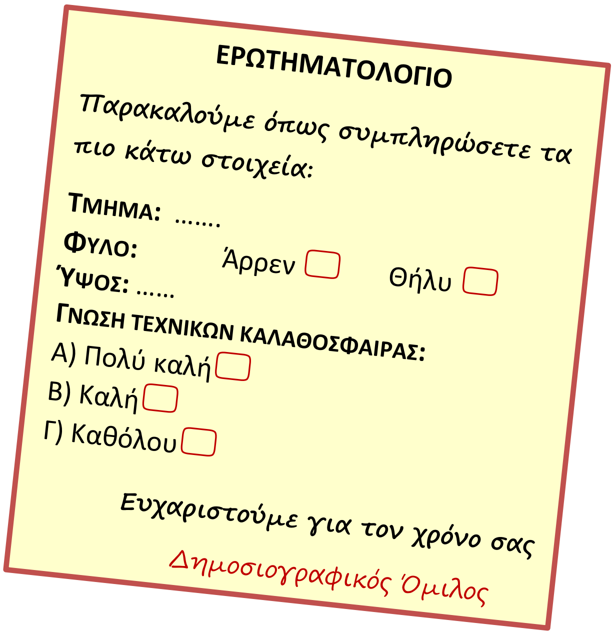


✓ Ποιο διάγραμμα θα επιλέγατε για να παρουσιάσετε την προτίμηση των φοιτητών για σπουδές σε χώρες της Ε.Ε. σε σχέση με χώρες εκτός Ε.Ε. και γιατί;

✓ Πώς νομίζετε ότι θα σχολίαζε ο δημοσιογράφος τα στοιχεία που παρουσιάζει το διπλανό διάγραμμα; Τι πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε;

Διερεύνηση (1)

Το σχολείο σας θα διοργανώσει αγώνες καλαθόσφαιρας. Δικαίωμα συμμετοχής έχει κάθε τμήμα του σχολείου με δική του ομάδα. Ο δημοσιογραφικός όμιλος του σχολείου αποφάσισε να μαζέψει πληροφορίες, για να παρουσιάσει τις γνώσεις τεχνικών καλαθόσφαιρας των μαθητών κάθε τμήματος. Χορήγησε στους μαθητές του σχολείου το διπλανό ερωτηματολόγιο.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Παρακαλούμε όπως συμπληρώσετε τα πιο κάτω στοιχεία:

ΤΜΗΜΑ: ....

ΦΥΛΟ: Άρρεν ☐ Θήλυ ☐

ΎΨΟΣ: ......

ΓΝΩΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΛΑΘΟΣΦΑΙΡΑΣ:

Α) Πολύ καλή ☐

Β) Καλή ☐

Γ) Καθόλου ☐

Ευχαριστούμε για τον χρόνο σας

Δημοσιογραφικός Όμιλος

- ✓ Να σκεφτείτε και να υλοποιήσετε τρόπους οργάνωσης και παραστατικής παρουσίασης των στοιχείων αυτών (μπορείτε να εργαστείτε σε ομάδες).

Το ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε στους 20 μαθητές του τμήματος A_5 και καταγράφηκαν οι εξής απαντήσεις:

ΦΥΛΟ	ΥΨΟΣ	ΓΝΩΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗΣ	ΦΥΛΟ	ΥΨΟΣ	ΓΝΩΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗΣ
Α	1,75	Γ	Θ	1,54	Β
Α	1,85	Β	Α	1,77	Γ
Θ	1,55	Β	Θ	1,63	Γ
Θ	1,61	Α	Α	1,79	Β
Θ	1,52	Α	Α	1,71	Γ
Θ	1,67	Β	Α	1,68	Α
Α	1,83	Γ	Θ	1,65	Β
Α	1,87	Α	Θ	1,56	Γ
Θ	1,69	Γ	Θ	1,75	Α
Θ	1,71	Β	Θ	1,48	Α

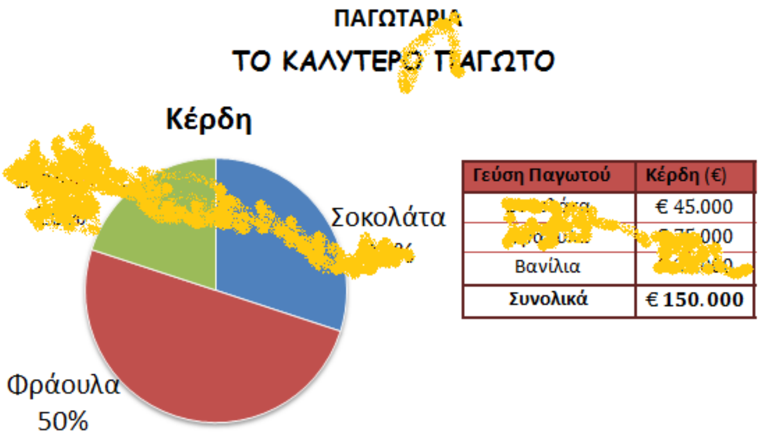
- ✓ Να επιλέξετε ένα κατάλληλο διάγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα που αφορούν το φύλο των μαθητών του τμήματος. Με ποιο άλλο διάγραμμα μπορούν να παρουσιαστούν τα δεδομένα αυτά;

- ✓ Να παρουσιάσετε με ένα κατάλληλο διάγραμμα τα δεδομένα που αφορούν τη γνώση τεχνικής καλαθόσφαιρας.

- ✓ Να επιλέξετε ένα κατάλληλο διάγραμμα για την παρουσίαση των δεδομένων που αφορούν το ύψος των μαθητών του A_5.

Διερεύνηση (2)

Μια εταιρεία που παράγει παγωτό σε τρεις διαφορετικές γεύσεις παρουσίασε τα μηνιαία κέρδη της σε ένα ενημερωτικό έντυπο για τους μετόχους, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο διάγραμμα και το διπλανό πίνακα.



Γεύση Παγωτού	Κέρδη (€)
[illegible]	€ 45.000
[illegible]	[illegible]000
Βανίλια	[illegible]
Συνολικά	**€ 150.000**

Χύθηκε όμως μελάνι στο έντυπο και δεν είναι εμφανή κάποια στοιχεία.

✓ Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που έχουν σβηστεί, με βάση τα στοιχεία που φαίνονται.

Μαθαίνω

- Ένας από τους σκοπούς της στατιστικής είναι η παρουσίαση των δεδομένων με τρόπο οργανωμένο και παραστατικό, ώστε να δίνεται όσο το δυνατόν ταχύτερη, πληρέστερη και πιο σαφής εικόνα των δεδομένων. Για τον σκοπό αυτό, μεταξύ άλλων, χρησιμοποιούνται οι πίνακες συχνοτήτων και διάφορα στατιστικά διαγράμματα.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για μέτρηση μεγεθών (π.χ. ύψος, χρόνος προπόνησης ενός αθλητή, ταχύτητα) μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή σε κάποιο διάστημα. Οι μεταβλητές αυτές παίρνουν πολλές διαφορετικές τιμές, οπότε δημιουργείται η ανάγκη ομαδοποίησής τους σε κατηγορίες.
Στην περίπτωση αυτή χωρίζουμε το διάστημα τιμών των παρατηρήσεων σε μικρότερα υποδιαστήματα του ίδιου πλάτους (στην πιο απλή μορφή) και βρίσκουμε πόσες από τις παρατηρήσεις βρίσκονται σε κάθε κατηγορία. Η διαδικασία αυτή λέγεται ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.

Στην ομαδοποίηση παρατηρήσεων προσέχουμε τα εξής:

- Όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να ανήκουν σε κάποια κατηγορία.
- Αν έχουμε παρατήρηση που είναι ίση με το άνω άκρο μιας κατηγορίας αυτή ταξινομείται στην αμέσως επόμενη κατηγορία.

- **Συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή αυτή.

  Παράδειγμα:

  Ρωτήθηκαν οι μαθητές ενός τμήματος για το αγαπημένο τους άθλημα. Οκτώ μαθητές απάντησαν ποδόσφαιρο, πέντε κολύμπι και έξι άλλο άθλημα.

  Οι αριθμοί $8, 5, 6$ *είναι η συχνότητα του κάθε αθλήματος αντίστοιχα.*

- **Πίνακας Συχνοτήτων**

  Ο **πίνακας συχνοτήτων** παρουσιάζει τις αντίστοιχες συχνότητες όλων των τιμών μιας μεταβλητής.

  Παραδείγματα:

Άθλημα	*Αριθμός Ατόμων*
Ποδόσφαιρο	*8*
Κολύμπι	*5*
Άλλο	*6*

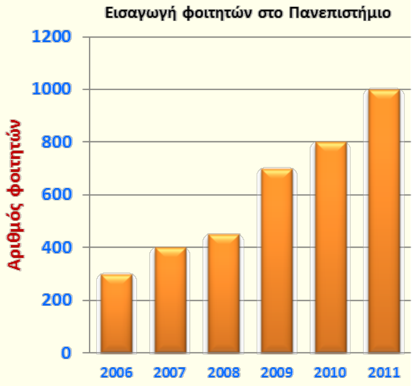
Ύψος μαθητών	*Αριθμός Μαθητών*
από 1,50 μέχρι 1,60	*5*
από 1,60 μέχρι 1,70	*6*
από 1,70 μέχρι 1,80	*8*
από 1,80 μέχρι 1,90	*3*

Χρονιά εισαγωγής φοιτητών στο Ανοικτό Πανεπιστήμιο	*Αριθμός Φοιτητών*
2006	*300*
2007	*400*
2008	*450*
2009	*700*
2010	*800*
2011	*1000*

- **Ραβδόγραμμα**

  Στο ραβδόγραμμα, οι τιμές της μεταβλητής παριστάνονται στον οριζόντιο άξονα, με κενά μεταξύ τους, ενώ η συχνότητα στον κατακόρυφο. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ξεχωριστά ορθογώνια για κάθε τιμή της μεταβλητής, τα οποία έχουν ύψος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα.

  Παραδείγματα:



- **Ιστόγραμμα**

Για να κάνουμε γραφική παρουσίαση μεταβλητών όπως το ύψος, το βάρος κ.λπ., στις οποίες χρειάζεται ομαδοποίηση παρατηρήσεων χρησιμοποιούμε το **ιστόγραμμα**.

Το ιστόγραμμα στην απλοποιημένη του μορφή αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια, τα οποία έχουν βάση ίση με κάθε υποδιάστημα και ύψος ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κατηγορίας.

Παράδειγμα:

Το ύψος 22 μαθητών παρουσιάζεται στο πιο κάτω ιστόγραμμα σε τέσσερις κατηγορίες. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα φαίνεται ότι 5 μαθητές έχουν ύψος από 1,50 m μέχρι 1,60 m.

- **Κυκλικό Διάγραμμα**

Στο κυκλικό διάγραμμα το σύνολο των δεδομένων παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής σε κυκλικούς τομείς (συνήθως διαφορετικού χρώματος).

Κάθε τομέας αναφέρεται σε μία τιμή ή κατηγορία τιμών της μεταβλητής. Δηλαδή παρουσιάζει το μέρος του συνόλου που αντιπροσωπεύει η κάθε συγκεκριμένη τιμή ή κατηγορία τιμών της μεταβλητής.

Παραδείγματα:

Παραδείγματα

1. Το επάγγελμα του πατέρα 20 μαθητών καταγράφηκε στον πιο κάτω πίνακα:

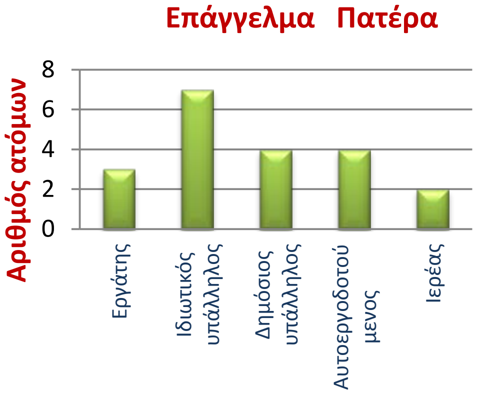
(α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα και το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

(β) Ποια κατηγορία έχει τα περισσότερα άτομα και σε ποιο ποσοστό επί του συνολικού αριθμού των ατόμων;

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων
Εργάτης	3
Ιδιωτικός υπάλληλος	7
Δημόσιος υπάλληλος	4
Αυτοεργοδοτούμενος	4
Ιερέας	2

Λύση:

(α)



Για την κατασκευή του κυκλικού διαγράμματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πιο κάτω βοηθητικό πίνακα:

Αριθμός ατόμων		Μέτρο επίκεντρης γωνιάς
Εργάτες	3	$\frac{3}{20} \cdot 360° = 54°$
Ιδιωτικοί υπάλληλοι	7	$\frac{7}{20} \cdot 360° = 126°$
Δημόσιοι υπάλληλοι	4	$\frac{4}{20} \cdot 360° = 72°$
Αυτοεργοδοτούμενοι	4	$\frac{4}{20} \cdot 360° = 72°$
Ιερείς	2	$\frac{2}{20} \cdot 360° = 36°$
Σύνολο:	20	360°

(β) Τα περισσότερα άτομα είναι ιδιωτικοί υπάλληλοι σε ποσοστό: $\frac{7}{20} = 35\%$.

2. Στον πιο κάτω πίνακα δίνεται η συγκέντρωση ($\mathrm{mgr/cm^3}$) ενός ρύπου στον αέρα 40 πόλεων. Να επιλέξετε και να κατασκευάσετε κατάλληλο διάγραμμα για την παρουσίαση των δεδομένων.

16	24	69	47	23	22	43	27	49	48
12	32	49	38	42	27	31	50	38	21
36	42	28	31	28	25	45	12	57	51
22	23	24	25	24	65	43	25	74	51

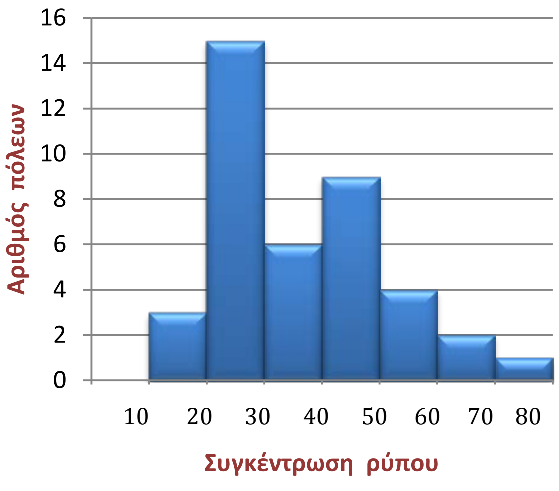
Λύση:

Μπορούμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα με ένα ιστόγραμμα.

Οργανώνουμε τις παρατηρήσεις σε κατηγορίες τιμών ως εξής:

Η παρατήρηση που είναι ίση με το άνω άκρο μιας κατηγορίας ταξινομείται στην αμέσως επόμενη κατηγορία. Δηλαδή, η παρατήρηση 50 καταχωρείται στην κατηγορία 50 – 60.

Συγκέντρωση ρύπων ($\mathrm{mgr/cm^3}$)	*Αριθμός πόλεων*
από 10 *μέχρι* 20	3
από 20 *μέχρι* 30	15
από 30 *μέχρι* 40	6
από 40 *μέχρι* 50	9
από 50 *μέχρι* 60	4
από 60 *μέχρι* 70	2
από 70 *μέχρι* 80	1



Δραστηριότητες

1. Σε μια πόλη μετρήθηκε η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία ($^\circ$C) επί 30 ημέρες και τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα:

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.
(β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν:
   i. Μικρότερη από $23^\circ\ C$;
   ii. Μεγαλύτερη από $24^\circ\ C$;
   iii. Τουλάχιστον $24^\circ\ C$;

2. Χρησιμοποιώντας τον διπλανό πίνακα συχνοτήτων που δίνει τον αριθμό των παιδιών 50 οικογενειών, να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:
(α) τουλάχιστον 1 παιδί,
(β) πάνω από 3 παιδιά,
(γ) από 3 έως και 5 παιδιά,
(δ) το πολύ 5 παιδιά,
(ε) ακριβώς 5 παιδιά.

Αριθμός παιδιών	Αριθμός οικογενειών
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3

3. Οι πιο κάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

Να κατασκευάσετε:
(α) Πίνακα Συχνοτήτων
(β) Ραβδόγραμμα
(γ) Κυκλικό Διάγραμμα

4. Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι:

21	17	18	20	19	21	21	17
19	19	18	18	20	19	17	19

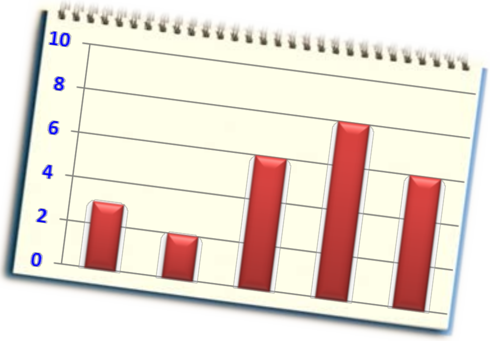
(α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
(β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

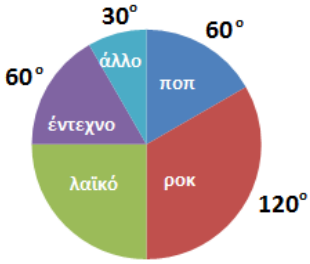
5. Η Ειρήνη είναι στο τμήμα A_1 και ο Χριστόφορος στο τμήμα B_2. Έκαναν μια έρευνα για το ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των μαθητών του τμήματός τους. Στον διπλανό πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της έρευνάς τους.

Αγαπημένο άθλημα	A_1	B_2
	Αριθμός Μαθητών	Αριθμός Μαθητών
Ποδόσφαιρο	4	8
Καλαθόσφαιρα	6	6
Αντισφαίριση	8	3
Κολύμπι	3	2
Άλλο	4	6

(α) Ποιου τμήματος τα αποτελέσματα παριστάνονται στο διπλανό ραβδόγραμμα;

(β) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα με τις προτιμήσεις των μαθητών του άλλου τμήματος.

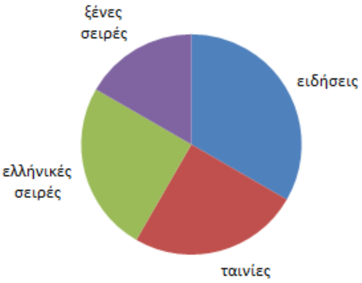




6. Ο Μουσικός Όμιλος του σχολείου έκανε μια έρευνα για το αγαπημένο είδος μουσικής των μαθητών. Αφού κατέγραψαν την προτίμηση του καθενός από τους 600 μαθητές, παρουσίασαν το διπλανό κυκλικό διάγραμμα με τις προτιμήσεις τους. Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων.

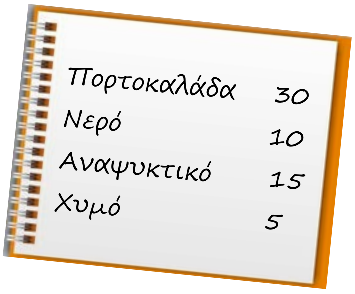
7. Στην παρουσίαση των δεδομένων μιας έρευνας, θα χρησιμοποιηθεί κυκλικό διάγραμμα. Ποιο θα είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας του κυκλικού τομέα που αντιπροσωπεύει το 55% των δεδομένων. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση:

(α) 55° (β) 99° (γ) 180° (δ) 198°

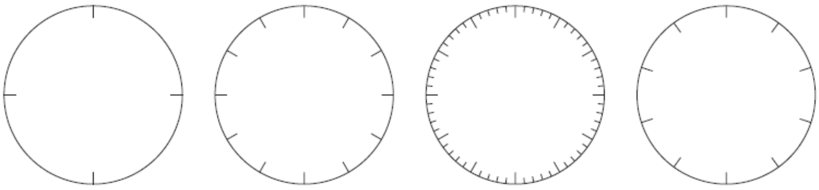


8. Ρωτήθηκαν 180 άτομα για το είδος τηλεοπτικού προγράμματος που προτιμούν να παρακολουθούν τις περισσότερες φορές. Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων δόθηκε το διπλανό κυκλικό διάγραμμα. Να εκτιμήσετε τον αριθμό των ατόμων που απάντησαν στην καθεμιά από τις κατηγορίες προγραμμάτων.

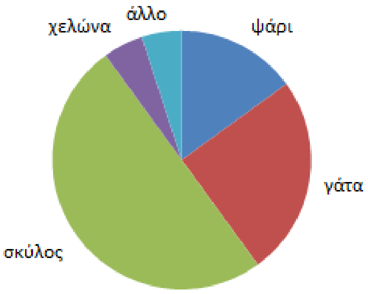
9. Σε μια εκδήλωση ο υπεύθυνος της καντίνας πήρε παραγγελία για τα ποτά που θα σερβιριστούν και τα κατέγραψε στον διπλανό πίνακα. Να επιλέξετε έναν από τους πιο κάτω κυκλικούς δίσκους (που είναι χωρισμένοι σε ίσα μέρη) για να αναπαραστήσετε με κυκλικό διάγραμμα τα στοιχεία του πίνακα.

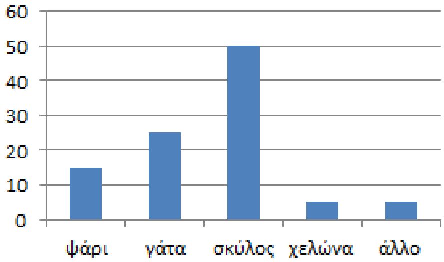


Πορτοκαλάδα	30
Νερό	10
Αναψυκτικό	15
Χυμό	5



10. Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το αγαπημένο τους κατοικίδιο ζώο και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με ένα κυκλικό διάγραμμα και ένα ραβδόγραμμα.





(α) Να κάνετε μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί πιο εύκολα από το ραβδόγραμμα.

(β) Να κάνετε μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί πιο εύκολα από το κυκλικό διάγραμμα.

11. Μια σχολή χορού ζήτησε προσφορές από μια εταιρεία λεωφορείων για τη μεταφορά των μαθητών της σχολής. Για να δώσει κάποια στοιχεία στις εταιρείες, ζήτησε από τους μαθητές να καταγράψουν στον ακόλουθο πίνακα τις αποστάσεις του σπιτιού τους από τη σχολή:

Μαθητής (αρχικά ονόματος)	ΑΑ	ΑΓ	ΓΜ	ΓΚ	ΔΔ	ΔΚ	ΕΕ	ΕΜ	ΕΛ	ΖΠ	ΗΝ	ΚΛ	ΦΛ	ΡΛ	ΕΦ
Απόσταση (km)	1,3	0,5	1,4	2,3	2,5	2,8	1,3	3,2	3,4	3,7	2,6	1,2	1,3	1,5	0,7

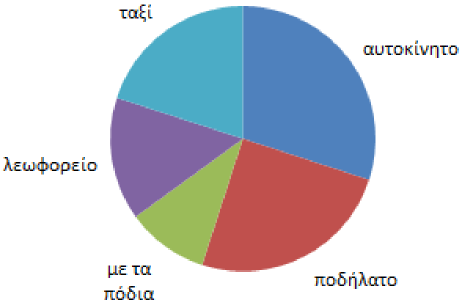
Να επιλέξετε το κατάλληλο διάγραμμα για να παρουσιάσετε τα πιο πάνω δεδομένα.

12. Η διευθύντρια μιας σχολής ζωγραφικής σκέπτεται να προσφέρει υπηρεσία για μεταφορά των μαθητών στη σχολή. Ρώτησε και κατέγραψε τους τρόπους που οι μαθητές της μεταβαίνουν στη σχολή στον πιο κάτω πίνακα.

Μαθητής	Τρόπος μετάβασης στη σχολή	Μαθητής	Τρόπος μετάβασης στη σχολή
Ανδρέας	*αυτοκίνητο*	Μιχάλης	*ποδήλατο*
Γιώργος	*λεωφορείο*	Γεωργία	*αυτοκίνητο*
Γιάννης	*ταξί*	Μιχαέλλα	*ποδήλατο*
Κώστας	*με τα πόδια*	Νίκη	*αυτοκίνητο*
Ανδρονική	*αυτοκίνητο*	Κωνσταντίνος	*ποδήλατο*
Δήμητρα	*λεωφορείο*	Παύλος	*αυτοκίνητο*
Ελένη	*αυτοκίνητο*	Ερατώ	*ποδήλατο*
Στάθης	*λεωφορείο*	Τασούλα	*ταξί*
Γεωργία	*με τα πόδια*	Σταύρος	*ποδήλατο*
Ανδρούλλα	*ποδήλατο*	Τάσος	*ταξί*

(α) Να οργανώσετε τα δεδομένα έτσι ώστε να είναι πιο εύκολο να τα μελετήσει και να βγάλει συμπεράσματα η διευθύντρια.

(β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.



Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πίνακα με έναν άλλο τρόπο.

(γ) Να συγκρίνετε τις πληροφορίες που παίρνετε από το ραβδόγραμμα και το διπλανό κυκλικό διάγραμμα και να συζητήσετε τι διαφορετικές πληροφορίες παίρνουμε από τα δύο γραφήματα.

(δ) Η διευθύντρια θα προσφέρει υπηρεσία μεταφοράς με μικρό λεωφορείο αν τουλάχιστο το 25% των μαθητών επιδείξει ενδιαφέρον. Αν θεωρήσουμε ότι όσοι χρησιμοποιούν ταξί και λεωφορείο ενδιαφέρονται για την υπηρεσία αυτή, είναι αρκετοί για να προσφέρει την υπηρεσία η σχολή; Μπορείτε να το συμπεράνετε αυτό μόνο από το κυκλικό διάγραμμα και γιατί;

13. Ο γυμναστής μιας ακαδημίας ποδοσφαίρου κατέγραψε το ύψος των αθλητών στον πιο κάτω πίνακα συχνοτήτων:

Ύψος σε cm	Αριθμός αθλητών
Από 135 μέχρι 140	4
Από 140 μέχρι 145	11
Από 145 μέχρι 150	9
Από 150 μέχρι 155	6

(α) Να παρουσιάσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε ένα ιστόγραμμα.

(β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν ύψος μεγαλύτερο από 140 cm.

(γ) Να υπολογίσετε τι μέρος του συνόλου των αθλητών έχει ύψος από 135 cm μέχρι 150 cm.

14. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο που αφιέρωσαν για την κατοίκον εργασία τους 50 μαθητές, κατά τη διάρκεια μίας εβδομάδας.

Χρόνος σε ώρες	Αριθμός μαθητών
μέχρι 2 ώρες	
από 2 μέχρι 4	
από 4 μέχρι 6	12
από 6 μέχρι 8	9
από 8 μέχρι 10	4

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές που μελέτησαν 2 μέχρι 4 ώρες ήταν τετραπλάσιοι από αυτούς που μελέτησαν λιγότερο από 2 ώρες.

(β) Να βρείτε πόσοι μαθητές μελέτησαν τουλάχιστον 6 ώρες την εβδομάδα.

(γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα της έρευνας.

15. Για να γράψουμε το ονοματεπώνυμό μας συμπληρώνοντας μια αίτηση, κάποιοι χρειαζόμαστε περισσότερο χώρο και κάποιοι λιγότερο.

Να καταγράψετε τον αριθμό των γραμμάτων του ονοματεπώνυμου των συμμαθητών σας και να παρουσιάσετε τα δεδομένα σας με το κατάλληλο διάγραμμα. Ποιός πιστεύετε ότι είναι ο ιδανικός αριθμός από τετραγωνάκια που πρέπει να υπάρχουν για τη συμπλήρωση του ονοματεπωνύμου.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πείραμα Τύχης – Υπολογισμός Πιθανότητας

Εξερεύνηση

Στα εγκαίνια ενός καταστήματος, κάθε πελάτης έχει την ευκαιρία να παίξει στον τροχό της τύχης. Ο κύριος Γιάννης και η κυρία Ελένη καθώς περιμένουν στη σειρά για να παίξουν, παρατηρούν τα αποτελέσματα που έφεραν οι προηγούμενοι πελάτες και συζητούν.

Γύρισε και κέρδισε!

Αριθμός στον τροχό	Δωροκουπόνι
1	€25
2	Ατυχήσατε
3	€10
4	€10
5	€100

Η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το δωροκουπόνι των €100 είναι $\frac{1}{5}$. *Άρα ένας κάθε πέντε πελάτες. Αφού οι προηγούμενοι τέσσερις στη σειρά δεν κέρδισαν το μεγάλο κουπόνι, είναι σίγουρο ότι θα το κερδίσω εγώ.*

Καλά λες, καλύτερα να μετακινηθώ και εγώ πιο πίσω στη σειρά, γιατί αποκλείεται να κερδίσουν δύο άτομα στη σειρά.

- ✓ Να σχολιάσετε τον πιο πάνω διάλογο.

Διερεύνηση (1)

Δύο αδέλφια, ο Στέφανος και η Ναταλία έχουν τελειώσει την κατ᾽ οίκον εργασία τους και θέλουν να χρησιμοποιήσουν και οι δύο τον υπολογιστή. Η Ναταλία πρότεινε να ρίξουν ένα ζάρι για να αποφασίσουν ποιος θα χρησιμοποιήσει πρώτος τον υπολογιστή. Αν η ένδειξη του ζαριού είναι το 5, θα τον χρησιμοποιήσει ο Στέφανος πρώτος, αλλιώς θα τον χρησιμοποιήσει πρώτη η Ναταλία.

- ✓ Να σχολιάσετε τον τρόπο που πρότεινε η Ναταλία.

- ✓ Μπορείτε να προτείνετε εσείς άλλους τρόπους για να αποφασίσουν ποιος θα χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή πρώτος;

Διερεύνηση (2)

Η Ιωάννα έχει ένα σακούλι με κύβους. Ζητά από τον Ανδρέα να βρει τι χρώμα είναι οι κύβοι στο σακούλι και πόσους έχει από κάθε χρώμα.

- ✓ Με βάση τις πιο κάτω δηλώσεις της Ιωάννας, ποια θα πρέπει είναι η απάντηση του Ανδρέα;

«Αν επιλέξω έναν κύβο στην τύχη από το σακούλι, το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κίτρινου κύβου είναι 50%.
Αν αφαιρέσω τέσσερις κόκκινους κύβους από το σακούλι, τότε το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κίτρινου κύβου, γίνεται 100%».

Μαθαίνω

- Μια διαδικασία η οποία εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες, που δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα της, αλλά ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

  Παράδειγμα:
  Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη που εμφανίζεται.

- Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Γενικά, ενδεχόμενο ενός πειράματος ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

Το ενδεχόμενο Γ που περιλαμβάνει μόνο ένα αποτέλεσμα ονομάζεται **απλό ενδεχόμενο**.

- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δυνατό ενδεχόμενο** ή γεγονός.
  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού,
  A: *Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός,* $A = \{2, 4, 6\}$
  B: *Η ένδειξη να είναι μεγαλύτερη ή ιση του* 5, $B = \{5, 6\}$
  Γ: *Η ένδειξη να είναι ο αριθμός* 2, $\Gamma = \{2\}$

- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**.
  Παράδειγμα:
  Από τα ενδεχόμενα A, B, Γ *που αναφέραμε πιο πάνω, αν η ένδειξη είναι 6 τότε λέμε ότι:*

  τα ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιούνται,

  ενώ το Γ *δεν πραγματοποιείται.*

- Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου ονομάζονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
  Παράδειγμα:
  το ενδεχόμενο $B = \{5, 6\}$ *έχει δύο ευνοϊκές περιπτώσεις* ($\nu(B) = 2$) *για την πραγματοποίησή του, όταν φέρουμε 5 ή 6.*

- Αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής, τότε τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**.

- Σε ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων ενός ενδεχομένου Α προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχόμενου Α**.

Δηλαδή: $\mathrm{P(A)} = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελέσματων}} = \dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο $B = \{2, 4, 6\}$ *έχει πιθανότητα πραγματοποίησης:*

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να φέρω άρτια ένδειξη είναι 50%.

- Ένα ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
  Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός βέβαιου ενδεχομένου είναι ίση με 1.

  Το ενδεχόμενο αυτό είναι ίσο με τον δειγματικό χώρο Ω.

  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο
  A*: Να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7,* $(A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$
  έχει πιθανότητα πραγματοποίησης: $P(A) = \frac{6}{6} = 1$

- Το ενδεχόμενο που δεν περιλαμβάνει κανένα δυνατό αποτελέσματα του πειράματος τύχης (το κενό σύνολο), ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.
  Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός αδύνατου ενδεχομένου είναι ίση με 0.
  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο
  A*: Να φέρω ένδειξη 7,* $(A = \emptyset)$
  έχει πιθανότητα πραγματοποίησης: $P(A) = \frac{0}{6} = 0$

- Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα πραγματοποίησης μεγαλύτερη από 0 και μικρότερη από 1.

  Άρα για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $\mathbf{0 \leq \boldsymbol{P(A)} \leq 1}$.

Παραδείγματα

1. Σε ένα σακούλι υπάρχουν δύο πράσινοι, τέσσερις μπλε και έξι κόκκινοι κύβοι. Επιλέγουμε έναν κύβο στην τύχη.
   - (α) Τι χρώμα κύβου είναι πιο πιθανό να επιλεγεί;
   - (β) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέγει πράσινος κύβος;
   - (γ) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέγει μπλε κύβος;
   - (δ) Ποια είναι η πιθανότητα να μην επιλεγεί μπλε κύβος;
   - (ε) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγεί άσπρος κύβος;
   - (στ) Πόσους μπλε κύβους πρέπει να προσθέσουμε στο σακούλι, ώστε η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε κύβος να είναι $\frac{1}{2}$;

Λύση:

Στο συγκεκριμένο πείραμα τύχης η επιλογή γίνεται από 12 κύβους, άρα τα δυνατά αποτελέσματα (απλά ενδεχόμενα) είναι:

κ_1 ή κ_2 ή κ_3 ή κ_4 ή κ_5 ή κ_6 ή π_1 ή π_2 ή μ_1 ή μ_2 ή μ_3 ή μ_4, *όπου* $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ *είναι οι 6 κόκκινες μπάλες και αντίστοιχα οι άλλες είναι οι 2 πράσινες και οι 4 μπλε.*

Άρα, ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6, \pi_1, \pi_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$

(α) *Είναι πιο πιθανό να επιλεγεί κόκκινος κύβος, επειδή οι κόκκινοι κύβοι είναι περισσότεροι από τους υπόλοιπους.*

(β) *Να επιλέξω κόκκινο κύβο είναι η δυνατότητας επιλογής των:*

κ_1 ή κ_2 ή κ_3 ή κ_4 ή κ_5 ή κ_6 *(ευνοϊκές περιπτώσεις)*

$$P(\text{κόκκινος κύβος}) = \frac{\text{πλήθος κόκκινων κύβων}}{\text{πλήθος όλων των κύβων}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(γ) $P(\text{μπλε κύβος}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

(δ) $P(\text{να μην είναι μπλε κύβος}) = P(\text{κόκκινος ή πράσινος κύβος})$
$= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

(ε) $P(\text{άσπρος κύβος}) = 0$. *Άρα, η πιθανότητα να επιλεγεί άσπρος κύβος είναι αδύνατο ενδεχόμενο.*

(στ) *Η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε κύβος για να είναι* $\frac{1}{2}$, *πρέπει οι μισοί από τους κύβους να είναι μπλε και οι υπόλοιποι τα άλλα χρώματα. Οι πράσινοι και οι κόκκινοι κύβοι είναι συνολικά 8, άρα πρέπει και οι μπλε να γίνουν 8. Θα πρέπει να προσθέσουμε ακόμη 4 μπλε κύβους.* $P(\text{μπλε}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

2. Ο μουσικός όμιλος διεξήγαγε μια έρευνα για το είδος των μουσικών οργάνων που παίζουν τα 30 μέλη της ορχήστρας του σχολείου.

   Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα. Αν επιλέξω στην τύχη έναν μαθητή της ορχήστρας, ποια είναι η πιθανότητα:

   Α: ο μαθητής να παίζει πνευστό μουσικό όργανο.

   Β: ο μαθητής να μην παίζει έγχορδο μουσικό όργανο.

Λύση:

Από το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίζουμε τον αριθμό των μαθητών που παίζουν κάθε είδος μουσικού οργάνου:

Πνευστά: $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$ *των 30 μαθητών της ορχήστρας.*

Άρα, $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ *μαθητές.*

Έγχορδα: $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ *Άρα,* $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ *μαθητές.*

Κρουστά: $30 - (15 + 10) = 30 - 25 = 5$ *μαθητές.*

Η πιθανότητα να επιλεγεί μαθητής:

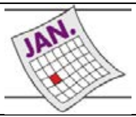
- *που παίζει πνευστό μουσικό όργανο είναι:*
  $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
- *που να **μην** παίζει έγχορδο μουσικό όργανο είναι:*
  $P(B) = \frac{15+5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Δραστηριότητες

1. Να καταγράψετε όλα τα πιθανά αποτελέσματα, που έχουμε από την εκτέλεση καθενός από τα πιο κάτω πειράματα τύχης:
   (α) η ρίψη ενός νομίσματος
   (β) η επιλογή ενός γράμματος από τη λέξη «ΚΥΠΡΟΣ».

2. Τα παιδιά της τάξης θα παίξουν έναν αγώνα καλαθόσφαιρας. Ο Χρίστος και ο Αντρέας θα είναι οι αρχηγοί των δύο ομάδων και μπορούν να επιλέξουν τα άλλα μέλη της ομάδας τους. Για να αποφασίσουν ποιος θα διαλέξει πρώτος τους συμπαίκτες του, θα ρίξουν ένα ζάρι. Να προτείνετε πώς θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα της ρίψης του ζαριού, για να αποφασίσουν με «δίκαιο» τρόπο.

3. Να σημειώσετε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου A σε καθένα από τα πιο κάτω σενάρια, όπως το παράδειγμα:

Δήλωση	$P(A)=0$	$0<P(A)<1$	$P(A)=1$
Παράδειγμα: • ***Κλήρωση του Πασχαλινού λαχνού στο τμήμα μου.*** *Α: να κληρωθεί ο δικός μου λαχνός.*		✓	
• ***Τυχαία επιλογή ενός αριθμού από το*** **1** ***μέχρι το*** **200.** *Α: ο αριθμός να είναι περιττός.*			
• ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη 8.* 			
• ***Τυχαία επιλογή δύο μαθητών από τους*** **341** ***του σχολείου.*** *Α: να έχουν την ίδια μέρα τα γενέθλια τους.*			
• ***Ρίψη ενός νομίσματος.*** *Α: να φέρω ένδειξη «γράμματα».*			
Α: Να είναι η Πρωτοχρονιά την τρίτη Δευτέρα του μήνα. 			
• ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7.* 			

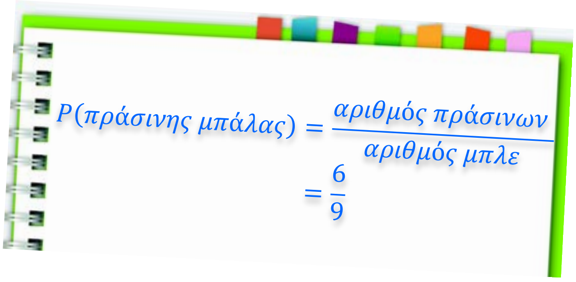
4. Για την επίσκεψη στο μουσείο της Αθήνας, η διεύθυνση του σχολείου πρέπει να επιλέξει τυχαία ένα άτομο από κάθε τμήμα. Η Μαρίλια είναι στο Γ_1 που έχει 25 άτομα, ενώ η αδελφή της η Εμέλια είναι στο τμήμα A_2 που έχει 20 άτομα. Ποια από τις δύο αδελφές έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγεί;

5. Ο Ανδρέας έχει σε ένα μεγάλο σακούλι 20 μπάλες του μπιλιάρδου αριθμημένες από το 1 μέχρι και το 20. Θα επιλέξει στην τύχη μια μπάλα από το σακούλι. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:
A: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι ζυγός,*
B: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι πολλαπλάσιο του 5,*
Γ: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι το 1 ή το 2,*
Δ: *Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού στην μπάλα να είναι 12,*
E: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μικρότερος του 21.*

6. Από ένα τμήμα 25 μαθητών/τριών επιλέγουμε στην τύχη ένα παιδί. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε αγόρι είναι 0,4, να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια.

7. Να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης, ώστε η πιθανότητα επιτυχίας να είναι 20%.

8. Η Νικολέττα θέλει να υπολογίσει την πιθανότητα να επιλέξει τυχαία μια πράσινη μπάλα από ένα κουτί που περιέχει 6 πράσινες μπάλες και 9 μπλε. Να εξετάσετε την ορθότητα της λύσης που έδωσε.

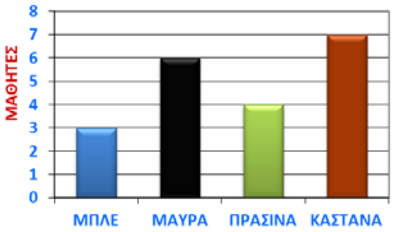


9. Για τις ανάγκες μιας έρευνας ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις 25 μαθητών καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός αδελφιών	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών	3	9	7	3	2	1

Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή από τους πιο πάνω, ποια είναι η πιθανότητα να απάντησε ότι η οικογένειά του έχει 3 παιδιά;

10. Οι μαθητές του $Α_2$ έκαναν μια έρευνα για το χρώμα των ματιών κάθε μαθητή του τμήματός τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στο διπλανό ραβδόγραμμα.



(α) Να υπολογίσετε πόσους μαθητές έχει το τμήμα.
(β) Πόσοι μαθητές του τμήματος δεν έχουν μαύρα μάτια;
(γ) Επιλέγουμε στη τύχη έναν μαθητή του τμήματος $Α_2$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:
Α: *ο μαθητής να έχει μπλε μάτια,*
Β: *ο μαθητής να μην έχει καστανά μάτια,*
Γ: *ο μαθητής να έχει μπλε ή πράσινα μάτια.*

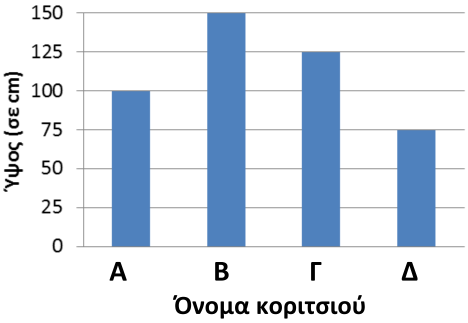
11. Ένας τροχός της τύχης είναι χωρισμένος σε έξι ίσους τομείς. Σε κάθε τομέα είναι σημειωμένος ένας διαφορετικός φυσικός αριθμός. Να κατασκευάσετε τον τροχό αυτό έτσι ώστε:

- $P(αριθμός\ μικρότερος\ του\ 8) = 1$
- $P(πολλαπλάσιο\ του\ 3) = \frac{1}{3}$
- $P(πολλαπλάσιο\ του\ 4) = \frac{1}{6}$
- $P(περιττός\ αριθμός) = \frac{2}{3}$

Δραστηριότητες ενότητας

1. Να κάνετε μια έρευνα για τη χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή στη ζωή μας. Να κατασκευάσετε ένα ερωτηματολόγιο, να συλλέξετε πληροφορίες και να τις παρουσιάσετε με το κατάλληλο διάγραμμα. Στην έρευνά σας μπορείτε να εξετάσετε:
    - *Το φύλο,*
    - *Την ηλικία,*
    - *Πόσους υπολογιστές έχετε στο σπίτι;*
    - *Για ποιους λόγους χρησιμοποιείτε υπολογιστή;*
    - *Πόσο χρόνο αφιερώνετε στη χρήση Η.Υ. την εβδομάδα; κ.λπ..*

2. Το διπλανό διάγραμμα δείχνει το ύψος τεσσάρων μικρών κοριτσιών. Η Λουκία είναι η ψηλότερη, η Μαρία η πιο κοντή και η Νίκη είναι πιο ψηλή από την Ελένη.



    (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τα ονόματα των κοριτσιών.

Α	Β	Γ	Δ

    (β) Να βρείτε το ύψος της Ελένης.

3. Ο πίνακας δίνει τον αριθμό των αυτοκινήτων σε μια οικογένεια.

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	2
1	12
2	20
3	16

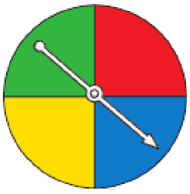
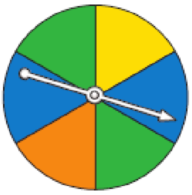
    (α) Πόσες οικογένειες έχουν 2 αυτοκίνητα;
    (β) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 αυτοκίνητα;
    (γ) Τι μέρος του συνόλου είναι ο αριθμός των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα;
    (δ) Τι ποσοστό οικογενειών έχουν 2 αυτοκίνητα;
    (ε) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.
    (στ) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα.
    (ζ) Αν επιλέξω τυχαία μια από τις πιο πάνω οικογένειες, ποια η πιθανότητα η οικογένεια να έχει 2 αυτοκίνητα;

4. Σε ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος του β΄ τετραμήνου. Πήραμε τις ακόλουθες βαθμολογίες: 15 , 11 , 10 , 10 , 14 , 16 , 19 , 18 , 13 , 17.

   Να βρείτε:

   (α) Ποιος είναι ο πληθυσμός;
   (β) Ποια είναι η μεταβλητή;
   (γ) Το είδος της μεταβλητής.

5. Καθένας από τους πιο κάτω τροχούς τύχης είναι μοιρασμένος σε ίσους τομείς. Να υπολογίσετε για καθένα από τους τροχούς την πιθανότητα ο δείκτης να πετύχει χρώμα:

			
Μπλε			
Κόκκινο			
Πράσινο			
Κίτρινο			
Πορτοκαλί			

6. Ο Μάνος και οι συμμαθητές του κάνουν μια έρευνα για τον αριθμό των ατόμων που επιβαίνουν σε κάθε αυτοκίνητο που περνά από το σχολείο τους. Ο αριθμός επιβατών 40 αυτοκινήτων έχει καταγραφεί στον πίνακα.

Αριθμός επιβατών
1, 1, 3, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1,
2, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1

   (α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
   (β) Να επιλέξετε το κατάλληλο διάγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα των μαθητών, ώστε να μπορέσετε να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
      i. Τι μέρος του συνολικού αριθμού αυτοκινήτων μεταφέρουν 3 επιβάτες;
      ii. Ποιος είναι ο αριθμός επιβατών που εμφανίζεται πιο πολλές φορές στις παρατηρήσεις;
      iii. Τι ποσοστό των αυτοκινήτων διακινούνται χωρίς συνεπιβάτες;

7. Να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης, ώστε να ισχύουν τα πιο κάτω:

   $P(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ 1) = 40\%$, $P(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ 8) = 10\%$,
   $P(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ 4) = \frac{1}{5}$, $P(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ 2) = 0{,}2$

8. Να κατασκευάσετε έναν τροχό της τύχης για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, ώστε η πιθανότητα να είναι:
   (α) $P(\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha) = 1$
   (β) $P(\pi\rho\acute{\alpha}\sigma\iota\nu o\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha) = 0$
   (γ) $0 < P(\pi o\rho\tau o\kappa\alpha\lambda\acute{\iota}\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha) < 1$
   (δ) $P(\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha) = P(\mu\pi\lambda\varepsilon\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha)$
   (ε) $P(\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha) > P(\mu\pi\lambda\varepsilon\ \chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha)$

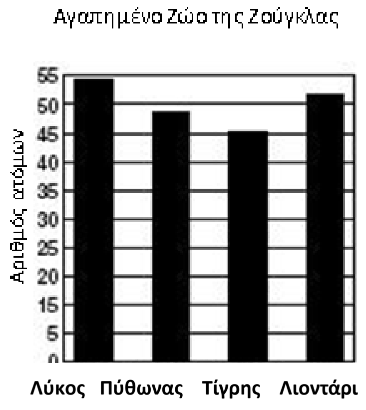
9. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα της εξέτασης 50 μαθητών ενός Λυκείου ως προς την ομάδα αίματός τους.

A	AB	B	A	O+	B	A	O-	AB	A
AB	O+	O+	AB	O-	AB	O+	O-	A	B
O-	A	B	A	B	A	B	A	AB	A
B	AB	A	O+	A	B	O+	B	O+	A
AB	B	AB	B	B	A	A	O+	O-	AB

   (α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.
   (β) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.
   (γ) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα.

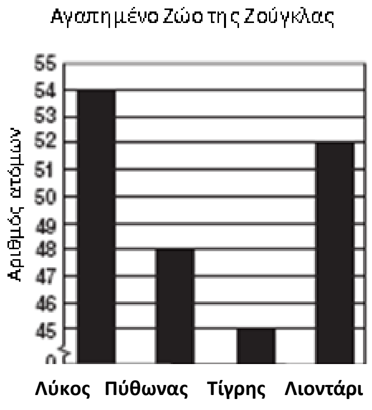
10. Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τις ίδιες πληροφορίες. Να επεξηγήσετε ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις φαίνεται να είναι παραπλανητική.

Αγαπημένο Ζώο της Ζούγκλας



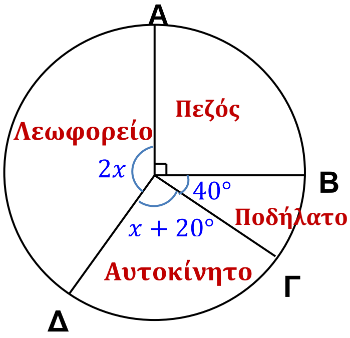
Γραφική παράσταση 1

Αγαπημένο Ζώο της Ζούγκλας



Γραφική παράσταση 2

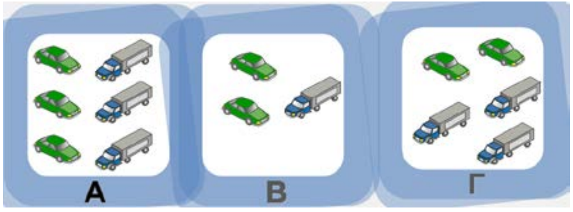
11. Το κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έγινε για τον τρόπο με τον οποίο μεταβαίνουν στο σχολείο οι 720 μαθητές του σχολείου.
    (α) Να υπολογίσετε την τιμή του x.
    (β) Αν επιλέξουμε έναν μαθητή στην τύχη, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής να μεταβαίνει στο σχολείο με το ποδήλατο.
    (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της μεταβλητής «*Τρόπος μετάβασης στο σχολείο*».



12. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:
    - A: *να είναι η ένδειξη μικρότερη του* 6,
    - B: *να είναι η ένδειξη άρτιος,*
    - Γ: *να είναι η ένδειξη πρώτος αριθμός,*
    - Δ: *να μην είναι η ένδειξη ο αριθμός* 5.

13. Από ένα τμήμα 20 μαθητών/τριών επιλέγουμε στην τύχη ένα παιδί. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα παιδί πολύτεκνης οικογένειας είναι 0,2, πόσοι είναι οι μαθητές/τριες του τμήματος που είναι παιδιά πολύτεκνων οικογενειών;

14. Στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα εμφανίζονται τρεις χώροι στάθμευσης A, B και Γ.



    (α) Αν επιλέξω τυχαία ένα όχημα από τον χώρο στάθμευσης Γ να υπολογίσετε την πιθανότητα το όχημα να είναι φορτηγό.
    (β) Αν επιλέξω τυχαία ένα όχημα από κάθε χώρο στάθμευσης:
        i. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης θα έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα το όχημα που θα επιλέξω να είναι αυτοκίνητο.
        ii. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης η πιθανότητα να επιλέξω φορτηγό είναι $\frac{1}{2}$.
        iii. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης η πιθανότητα να επιλέξω αυτοκίνητο είναι ίση με την πιθανότητα να επιλέξω φορτηγό.

15. Η Στέλλα έχει ένα κιβώτιο στο οποίο υπάρχουν 3 μαύροι, 6 πράσινοι, 2 κίτρινοι και 6 κόκκινοι βόλοι. Πρόσθεσε μερικούς άσπρους βόλους, ώστε η πιθανότητα να πάρουμε στην τύχη ένα μαύρο βόλο να είναι $\frac{1}{7}$. Πόσους άσπρους βόλους έβαλε στο κιβώτιο;

16. Εξετάσαμε 50 άτομα ως προς τον αριθμό των εφημερίδων που αγοράζουν κάθε βδομάδα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από αυτά, να βρείτε την πιθανότητα:
(α) Να αγοράζει 2 εφημερίδες.
(β) Να αγοράζει 3 ή 4 εφημερίδες.
(γ) Να αγοράζει τουλάχιστον 5 εφημερίδες.
(δ) Να αγοράζει το πολύ 2 εφημερίδες.

Αριθμός εφημερίδων	Αριθμός ατόμων
0	4
1	5
2	10
3	14
4	8
5	4
6	3
7	2

17. Η Στατιστική Υπηρεσία έχει καταγράψει τα αποτελέσματα κατανομής των ξένων υπηκόων κατά χώρα υπηκοότητας το 2011. Να επιλέξετε το κατάλληλο διάγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα.

Χώρα Υπηκοότητας	Αριθμός	Ποσοστό %
Σύνολο	**179547**	**100,0**
ΕΕ(26)	**112424**	**62,6**
Ελλάδα	31044	17,3
Ηνωμένο Βασίλειο	26659	14,8
Ρουμανία	24376	13,6
Βουλγαρία	19197	10,7
Τρίτες χώρες	**67123**	**37,4**
Φιλιππίνες	9744	5,4
Ρωσία	8663	4,8
Σρι Λάνκα	7350	4,1
Βιετνάμ	7102	4,0

18. Ένα κιβώτιο περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες μπάλες. Οι άσπρες μπάλες είναι 15 και οι μαύρες είναι τριπλάσιες από τις κόκκινες. Διαλέγουμε στην τύχη μια μπάλα από το κιβώτιο. Αν η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$, να βρείτε:
(α) Πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη μπάλα;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να μελετήσετε τον πίνακα που παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης στο διαγώνισμα των μαθηματικών και της επιστήμης. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα αυτά στους συμμαθητές σας χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.

Μάθημα	Βαθμοί
Μαθηματικά	17, 18, 18, 16, 1, 15, 15, 17, 18, 15, 20, 14, 17, 2, 17
Επιστήμη	17, 18, 17, 17, 15, 17, 17, 17, 20, 17, 17, 20, 17, 17, 17

2. Να κάνετε μια έρευνα στο σχολείο σας, για να διερευνήσετε τις απόψεις των μαθητών/τριών για το ποια είναι τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει το σχολείο σας. Στη συνέχεια, να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.

3. Να βρείτε από την ιστοσελίδα της Στατιστικής Υπηρεσίας: http://www.mof.gov.cy/cystat στατιστικά στοιχεία για την Κύπρο και να τα επεξηγήσετε στους συμμαθητές σας.

4. Η Ελίνα θέλει να παρακολουθήσει με τις φίλες της τη συναυλία του αγαπημένου της συγκροτήματος. Έχει στη διάθεσή της μόνο δύο προσκλήσεις και θέλει να βρει έναν τρόπο για να επιλέξει ποια από τις τρεις φίλες της θα πάρει μαζί της. Να μελετήσετε αν και πώς μπορεί να αποφασίσει χρησιμοποιώντας τους πιο κάτω τρόπους.

5. Ο Γιώργος έχει στο πορτοφόλι του €65 σε χαρτονομίσματα των €5, των €10 και των €20. Ποια η πιθανότητα να έχει στο πορτοφόλι του ένα χαρτονόμισμα των €5, δύο των €10 και δύο των €20.

6. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν πράσινοι, κόκκινοι και μπλε κύβοι. Να εξετάσετε πώς θα μεταβληθεί η πιθανότητα να επιλεγεί το κάθε χρώμα, αν οι βόλοι του κάθε χρώματος διπλασιαστούν.

7. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 χρώματα βόλων, κόκκινοι, κίτρινοι, πράσινοι και μπλε. Ο λόγος των κόκκινων βόλων προς τους κίτρινους είναι $1 : 1$, των πράσινων προς τους μπλε είναι $5 : 1$ και των πράσινων προς τους κίτρινους βόλους είναι $5 : 3$. Ο ελάχιστος αριθμός βόλων στο κουτί είναι 20.
   (α) Να υπολογίσετε τους βόλους που υπάρχουν στο κουτί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   (β) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξετε τυχαία έναν κόκκινο βόλο;
   (γ) Να κατασκευάσετε έναν τροχό της τύχης που να αναπαριστά την πιθανότητα του κάθε χρώματος.

8. Ένας τριψήφιος αριθμός σχηματίζεται από τα ψηφία $2, 5, 8$ τα οποία χρησιμοποιούνται από μια φορά το καθένα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   Α: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το* 3
   Β: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το* 2
   Γ: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί να είναι περιττός*

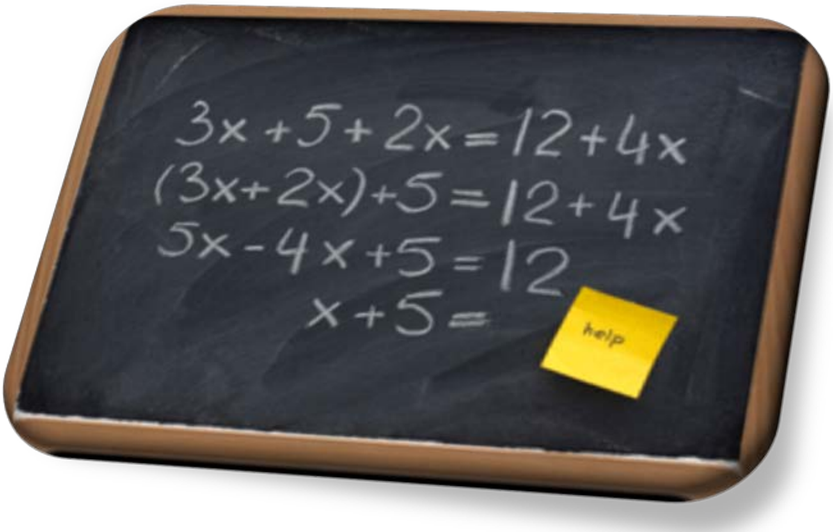
9. Δίνεται το ακόλουθο διάγραμμα που αφορά στις διανυκτερεύσεις Ελλήνων και αλλοδαπών στα ξενοδοχεία της Αθήνας από το 1998 μέχρι το 2007. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν.

Συγκριτική εξέλιξη των διανυκτερεύσεων στα ξενοδοχεία της Αθήνας την περίοδο 1998-2007 με έτος βάσης το 1998 (τιμή έτους βάσης = 100)

   (α) Ποια χρονική περίοδο οι διανυκτερεύσεις των Ελλήνων στα ξενοδοχεία της Αθήνας ήταν περισσότερες από αυτές των αλλοδαπών;
   (β) Σε ποιο ποσοστό μειώθηκαν οι διανυκτερεύσεις των αλλοδαπών το 2003 σε σύγκριση με το 1998;
   (γ) Ποια χρονιά υπήρξε η μεγαλύτερη διαφορά στις διανυκτερεύσεις Ελλήνων σε σχέση με τις διανυκτερεύσεις των αλλοδαπών;
   (δ) Ποιες χρονιές είχαμε αυξήσεις στις διανυκτερεύσεις αλλοδαπών σε σύγκριση με την προηγούμενη χρονιά;

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Β΄ τεύχους



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ακολουθίες

<table>
<tr><th colspan="2">ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ <i>σελίδα 12</i></th></tr>
<tr><th>Δραστηριότητα</th><th>Απαντήσεις</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Π.χ.: 1,8,15, 22, 29
Π.χ.: 3,17,31</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>(α) 4, 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81, …,
(β) 47,42, 37, 32, 27, 22, 17, 12, 7, …
(γ) 8, 10 , 12 , 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, …
(δ) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, …
(ε) $120, 60, 30\ 15, \frac{15}{2}, \frac{15}{4}, \frac{15}{8}, \frac{15}{16}, \frac{15}{32}, \dots$
(στ) 7, 7, 7 , 7 , 7, 7 , …</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
<table>
<tr><th>$1^{ος}$ όρος</th><th>Διαδικασία</th><th>Ακολουθία</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Προσθέτω 4</td><td>2, 6, 10, 14, 18, …</td></tr>
<tr><td>110</td><td>Αφαιρώ 8</td><td>110, 102, 94, 86, 78, …</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Τριπλασιάζω</td><td>7, 21, 63, 189, 567, …</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Διπλασιάζω και αυξάνω κατά 2</td><td>5, 12, 26, 54, 110, …</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>(α) 5, 10, 15, 20, 25, … (β) 6, 7, 8, 9,10, …
(γ) 7, 17, 27, 37, 47, … (δ) 17, 14, 11, 8, 5, …
(ε) $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \dots$ (στ) 1, 4, 9, 16, 25, …
(ζ) $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$ (η) 0,1,4, 9, 16, …</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>(α) 11</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>(α) 2, 7, 12, 17, 22, 27, …
(β) 3, 6,12, 24, 48, 96, …
(γ) $-5, -5, -5, -5, -5, -5, \dots.$
(δ) $4, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}, \dots$
(ε) 1,2, 3, 5, 8, 13, …</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>(α) 4, 44, 444, 4444, 44444, 444444, 4444444
(β) 1, 11, 121, 1331, 14641, 161051, 1771561, 19487171
(γ) 1, 11, 121, 12321, 1234321, 123454321, 12345654321, 1234567654321
(δ) $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5^2 , \alpha_3 = 5^3, \alpha_4 = 5^4, \alpha_5 = 5^5 , \alpha_6 = 5^6$
(ε) 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, 8, 1,9, …</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>(α) $\alpha_{20} = 80$
(β) $\beta_{60} = 40$
(γ) $\gamma_{2020} = 10103$
(δ) $\delta_8 = 144$</td></tr>
</table>

ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ *Σελίδα 19*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 2 (β) 2 (γ) 9 (δ) 10
2.	(α) $\alpha_\nu = 96 + 4\nu$ (β) $\alpha_\nu = 9 + 2\nu$ (γ) $\alpha_\nu = 18 + 3\nu$ (δ) $\alpha_\nu = (\nu + 5)^2$
3.	(α) $\alpha_\nu = 4\nu - 2$ (β) $\alpha_\nu = 2.3^{\nu-1}$ (γ) $\alpha_\nu = -2\nu - 5$ (δ) $\alpha_\nu = 10$ (ε) $\alpha_\nu = \frac{3.2^{\nu-1}}{3\nu+2}$ (στ) $\alpha_\nu = 63 - 3\nu$ (ζ) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{4}$
4.	(ε)
5.	(α) $\alpha_\nu = 3\nu + 1$ (β) Δεν υπάρχει
6.	(α) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (β) $\alpha_{0,} = 0, \alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu + 1$ (γ) $\alpha_\nu = \left(\frac{3}{4}\right)^{\nu-1}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελιδα 21*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $17, 12, 7, 2, -3, -8, -13 \ldots$ (β) $-1, 2, -4, 8\ , -16, 32, -64, \ldots$ (γ) $-5, -1\ , 3\ , 7\ , 11, 15, 19 \ldots .$ (δ) $10000, 1000, 100, 10,1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\ \ldots .$ (ε) $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$ (στ) $1, 2, 6\ ,24,120, 720, 5040, 40320, \ldots .$
2.	(α) $\alpha_\nu = 2\nu + 5, \alpha_{30} = 65$ (β) $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot 2^\nu, \alpha_{30} = -2^{30}$ (γ) $\alpha_\nu = 55 - 5\nu, \alpha_{30} = -95$ (δ) $\alpha_\nu = \frac{15\nu-11}{19-4\nu}, \alpha_{30} = -\frac{439}{101}$ (ε) $\alpha_\nu = \nu^2, \alpha_{30} = 900$
3.	Το Δεκέμβριο
4.	E
6.	(α) $2, 4, 8, 16, \ldots .$ (β) $\alpha_\nu = 2^\nu$ (γ) $\alpha_{40} = 2^{40}$

8.	(α) $100, 120, 140, 160, 180, 200$ (β) $\alpha_\nu = 80 + 20\nu$ (γ) 36
9.	(α) $50, 80, 110, 140, 170, 200, 230$ (β) $\alpha_\nu = 20 + 30\nu$ (γ) 950 (δ) 16
10.	(α) $\alpha_\nu = \nu^3$ (β) $\alpha_\nu = 6\nu^2$ (γ) $\alpha_1 = 1, \alpha_\nu = \nu^3 - (\nu - 2)^3, \nu \geq 2$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελιδα 24*

<table>
<tr><th>Δραστηριότητα</th><th>Απαντήσεις</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>(α) $16, 6.4, 2.56$
(β) 4^η</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>(α) $\alpha_\nu: 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ $\beta_\nu: 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.$
(β) $\gamma_\nu = 3\nu + 1$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>(α) $\alpha_\nu = \nu^2 + 1$
(β) $\alpha_\nu = \frac{\nu.(\nu+1)}{2}$
(γ) $\alpha_\nu = 3^\nu - 3$
(δ) $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu^2$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>(α) $\alpha_\nu = \frac{\nu.(\nu-1)}{2}$
(β) 105</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Παναγιώτης: $400, 400.8, 401.6, 402.4, \ldots$
Σταύρος: $391, 392.1, 393.2, 394.3, \ldots$
30 πίτσες</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>(α) $\alpha_\nu = 2\nu + 6$
(β) $\alpha_\nu = 3.4^{\nu-1}$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$\alpha_{200} = 660$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>(α) $\gamma_\nu = \nu^2 + \nu + 3$
(β) $4, \frac{5}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{16}, \ldots$
(γ) $\delta_\nu = (\nu + 3) \cdot \nu^2$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>(α)
<table>
<tr><th>ν</th><th>Πλήθος δέντρων μηλιάς</th><th>Πλήθος κυπαρισσιών</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td><td>24</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td><td>32</td></tr>
<tr><td>5</td><td>32</td><td>40</td></tr>
</table>
(β) 8</td></tr>
</table>

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΗΚΟΥΣ *Σελίδα 31*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		$AB = 8\alpha$		
2.	(α)	$A\Gamma = 5\ cm$	(β)	$A\Gamma = 10\ cm$
	(γ)	$A\Gamma = 20\ cm$	(δ)	$A\Gamma = 7{,}5\ cm$
3.		$x = 4\ , AB = 20\ cm$		
4.		$21\ m$		
5.		$y = 20\ ,\ \ AE = 40\ \mu.,\ \ AB = 61\ \mu.$		
6.		$AB = \Delta E$		
7.	(ζ)	$MN = \frac{B\Gamma}{2}$		
	(η)			

ΓΩΝΙΑ *Σελίδα 37*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	$\widehat{A_1}, \widehat{\Delta AE}, \widehat{EA\Delta}$		
2.	(α) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$	(β)	$AB, B\Gamma, A\Gamma$ ευθύγραμμα τμήματα
3.	Οξεία Μη κυρτή Αμβλεία Πλήρης		Ορθή Ευθεία Μηδενική Μη κυρτή
5.	$\hat{\gamma} > \hat{\alpha} > \hat{\beta}$		
6.	Κυρτές: $\hat{\alpha}, \hat{\varphi}, \hat{\omega}$		Μη Κυρτές: $\hat{\theta}, \hat{\psi}$
7.	Κυρτές: $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\varepsilon}$		Μη Κυρτές : $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$
8.	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$		
9.	$A\hat{O}B = 59°$		
11.	$30° + 120° = 150°$		
12.	(α) 90°	(β)	0°
	(γ) $15°$		

ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ – ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ *Σελίδα 43*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	$x = 145^{\circ}$

3.

Γωνία $\hat{A}$	Συμπληρωματική της $\hat{A}$	Παραπληρωματική της $\hat{A}$
42°	48°	138°
10°	80°	170°
27°	63°	153°
90°	0°	90°
110°	-----------------	70°
210°	-----------------	---------------
57°	33°	123°
76°	14°	104°
$x°$	$(90-x)°$	$(180-x)°$

4.	(α)	135°	(β)	70°
	(γ)	45°		
6.	(α)	$x = 60$	(β)	$x = 17$
	(γ)	$x = 30$	(δ)	$x = 25$
	(ε)	$x = 120$	(στ)	$x = 24$
7.	(α)	$x = 44°$	(β)	$\nu = 49°$, $\rho = 80°$ $\alpha = \mu = 51°$
8.		90°		
10.	(α)	$B\hat{A}\Gamma = 16°$	(β)	$B\hat{A}\Gamma = 64°$
	(γ)	$B\hat{A}\Gamma = 32°$		
11.	(α)	$x = 12$	(β)	$x = 13$

ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ *Σελίδα 52*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	AB_5
4.	Είναι ίσες
6.	Στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου AB με τον δρόμο.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ *Σελίδα 59*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
4.		$x = 60°$		
6.	(α)	$\overset{\frown}{\Delta EA} = 144°$	(β)	$\overset{\frown}{\Delta AE} = 288°$
8.		Τέμνει τον κύκλο		
9.	(α)	$AB = A\Gamma$	(β)	Είναι ίσες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 61*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	χχ΄	(β)	ΚΜ
	(γ)	Μχ	(δ)	Μ

3.

Μέτρο Γωνίας	Είδος Γωνίας
98°	Αμβλεία
270°	Μη κυρτή
180°	Ευθεία
181°	Μη κυρτή
0°	Μηδενική
90°	Ορθή
360°	Πλήρης
117°	Αμβλεία

5.		$x = 72^\circ$		
6.		$x = 30^\circ$		
8.	(α)	ΟΡΘΟ	(β)	ΟΡΘΟ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΟΡΘΟ	(στ)	ΟΡΘΟ
9.	(α)	$\Gamma\hat{O}B, B\hat{O}Z$		
	(β)	$E\hat{O}\Gamma, \Delta\hat{O}Z$		
	(γ)	$A\hat{O}B$		
	(δ)	$A\hat{O}E, E\hat{O}\Gamma$		
	(ε)	$A\hat{O}E, E\hat{O}B$		
	(στ)	$A\hat{O}E, E\hat{O}\Gamma, \Gamma\hat{O}B$		
10.		$\Delta H > \Delta Z$		
11.	(α)	$a = 55^\circ$	(β)	$x = 20^\circ$
	(γ)	$y = 25^\circ$, $\omega = 40^\circ$	(δ)	$\delta = 22^\circ$
	(ε)	$\kappa = 35^\circ$, $\theta = 45^\circ$	(στ)	$x = 20^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

12.

Ευθ. Τμήμα	Ακτίνα	Διάμετρος	Χορδή
OA	✓		
OB	✓		
$B\Gamma$		✓	✓
AB			✓
AE		✓	✓
EO	✓		

13.	(α)	$a = 38°$
	(β)	$x = 70°$
	(γ)	$\beta = 40°, x = 140°, \omega = 70°$
	(δ)	$\beta = 50°$
14.		$\Psi\hat{O}B = 29°,\ \Gamma\hat{O}Z = 32°,\ Z\hat{O}B = 119°$
15.		$x = 30°,\ EB\Gamma = 60°,\ \Delta\widehat{K}E = 120°$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 66*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$MN \leq \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$
2.	$A\Gamma = B\Gamma\ ,\ \Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{B}A$
4.	Ευθεία AB
6.	Π.χ. (2,2)

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Διανύσματα

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ *Σελίδα 73*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.		Το β και το ζ.		
2.	(	$\vec{\theta}$ και $\vec{\kappa}$	(β)	$\vec{\eta}$ και $\vec{\lambda}$
3.	(	$\overrightarrow{\Delta E} = 1$, $\overrightarrow{\Delta Z} = 2$, $\overrightarrow{\Delta \Theta} = 4$, $\overrightarrow{BA} = 1$, $\overrightarrow{B\Gamma} = 1$, $\overrightarrow{B\Delta} = 2$, $\overrightarrow{BZ} = 4$, $\overrightarrow{K\Theta} = 2$, $\overrightarrow{NI} = 4$		
	(	Ίσα: $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta} =$ $\overrightarrow{\Delta Z}$ και $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{\Delta\Theta}$ Αντίθετα: $\overrightarrow{\Delta\, Z} = -\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{B\Delta} = -\overrightarrow{K\Theta}$ $\overrightarrow{\Delta E} = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BZ} = -\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{\Delta\Theta} = -\overrightarrow{NI}$		
	(	Π.χ. $\overrightarrow{NH}$		
4.	(	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
		ΛΑΘΟΣ		
8.	(	Π.χ. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta}$	(β)	Π.χ. $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{O\Gamma}$
	(	Π.χ. $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{ZE} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$	(δ)	Π.χ. $\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}$
		Π.χ. $\overrightarrow{Z\Gamma}, \overrightarrow{EB}$		

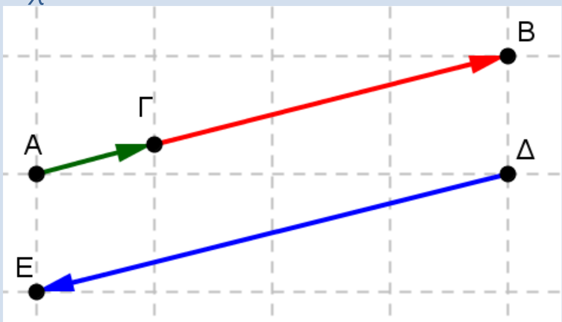
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ *Σελίδα 80*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ	(β) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΣΩΣΤ
4.	(α) $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ (γ) $\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}+\vec{\delta}$	(β) $\vec{x}=-\vec{\beta}+\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$	
5	(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}$ (γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$	(β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$ (δ) $\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{BA}$	
7	(α) $\overrightarrow{BA}=-\vec{\beta}$ (δ) $\overrightarrow{EH}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ (ζ) $\overrightarrow{Z\Delta}=2\vec{\beta}$	(β) $\overrightarrow{Z\Gamma}=2\vec{\beta}$ (ε) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ (η) $\overrightarrow{\Gamma A}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$	(γ) $\overrightarrow{H\Delta}=\vec{\alpha}$ (στ) $\overrightarrow{BE}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 83*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) Μονόμετρο (δ) Μονόμετρο (ζ) Μονόμετρο	(β) Διανυσματικό (ε) Μονόμετρο	(γ) Μονόμετρο (στ) Διανυσματικό
2.	(α) 21 cm και 5 cm	(β) 3 cm νότια και 4 cm ανατολικά του A	
5.	(α) $\lvert\vec{\alpha}\rvert=\sqrt{5}$, $\lvert\vec{\beta}\rvert=\sqrt{8}$, $\lvert\vec{\gamma}\rvert=\sqrt{10}$		
7.	(α) $\left\lvert\overrightarrow{MA}\right\rvert=5$		
8.	$\overrightarrow{A\Delta}=2\vec{\beta}$ $\overrightarrow{\Gamma M}=-\vec{\alpha}$ $\overrightarrow{NM}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ $\overrightarrow{M\Lambda}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 86*

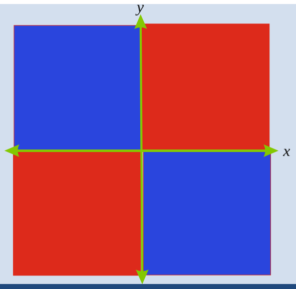
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	*Π.χ*  $\lvert\overrightarrow{\Gamma}\rvert$
4.	(α) $\overrightarrow{AE}=\frac{\vec{\beta}}{3},\quad \overrightarrow{EB}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{3},\quad \overrightarrow{\Gamma\Delta}=\frac{2(4\vec{\beta}-3\vec{\alpha})}{15}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: Συναρτήσεις

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ *Σελίδα 92*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις					
2.		π.χ. $(0,0)$, $(1,1)$, $(-100,-100)$, $(2012,2012)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, … *ανήκουν στη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου*					
3.	(α)	π.χ. $(-2,0)$	(β)	π.χ. $(0,-2)$			
5.	(α)	*i.*	$(-5,4)$	*ii.*	$(-3,-1)$		
		iii.	$(4,-4)$	*iv.*	$(-5,-3)$		
		v.	$(2,3)$				
	(β)	Κατασκήνωση, Προβλήτα, Πισίνα					
	(γ)	Πισίνα$(-5,-3)$, Γήπεδο τέννις$(-3,-5)$, Παραλία$(4,-4)$, Ταχυδρομείο$(2,-2)$, Ξενοδοχείο$(-3,-1)$					
6.	(α)	$M(2,5)$	(β)	$\Gamma(14,5)$			
7.	(α)	ΠΑΝΤΟΤΕ					
	(β)	ΚΑΠΟΤΕ,	Αντιπαράδειγμα: $(3,0)$				
	(γ)	ΠΟΤΕ ,	Αντιπαράδειγμα: $(-3,-1)$				
	(δ)	ΠΟΤΕ,	Αντιπαράδειγμα: $(-3,-1)$				
		Πλευρά (χ)	1	2	3	4	5
8.	(α)	*Περίμετρος*(y)	3	6	9	12	15
		(x,y)	$(1,3)$	$(2,6)$	$(3,9)$	$(4,12)$	$(5,15)$

9.



Κόκκινο π.χ. $(1,1)$, $(-1,-1)$
Μπλε π.χ. $(1,-1)$, $(-1,1)$
Πράσινο π.χ. $(-1,0)$, $(0,-1)$

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ *Σελίδα 99*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.

Τύπος $y = x - 3$	
x	y
-2	-5
0	-3
2	-1

Τύπος $y = -2x$	
x	y
-3	6
1	-2
4	-8

2. (α) $2 \to 7$, $5 \to 13$, $0 \to 3$, $0{,}5 \to 4$

(β) Κανόνας: Τριπλασιάστε και αφαιρέστε ένα

3. $y = 3x + 2$

4. $y = x + 4$

5. (α) $\kappa = 2 \cdot \tau$

(β) $\kappa = 18$ κομμάτια

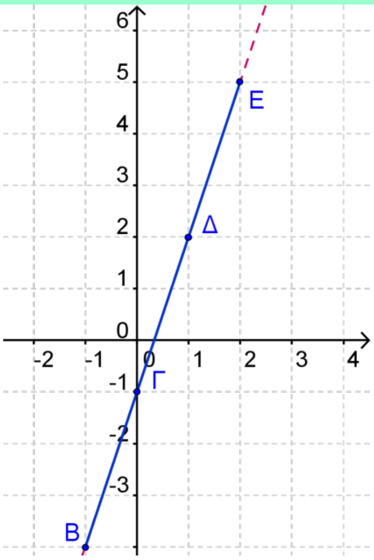
6. $y = x^2$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ *Σελίδα 105*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

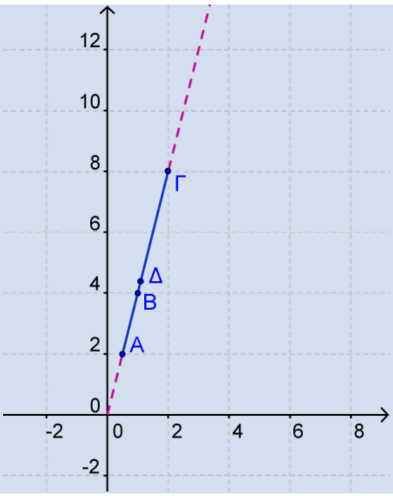
1.

$(-2,-7)$
$(-1,-4)$
$(0,-1)$
$(1,2)$,
$(2,5)$



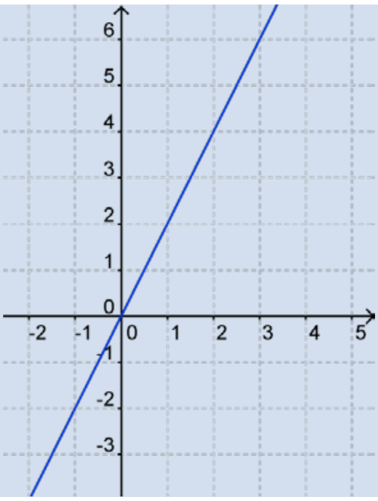
2. (α) $y = 4x$

x	y
0,5	2
1	4
1,1	4,4
2	8

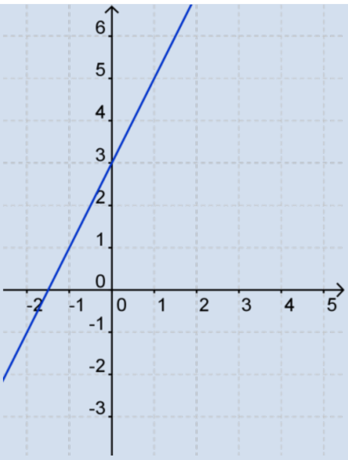


3. $y = 4x$

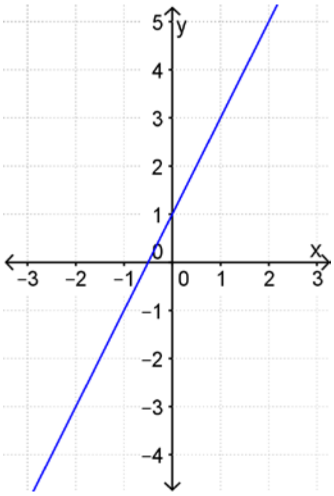
4. (α)



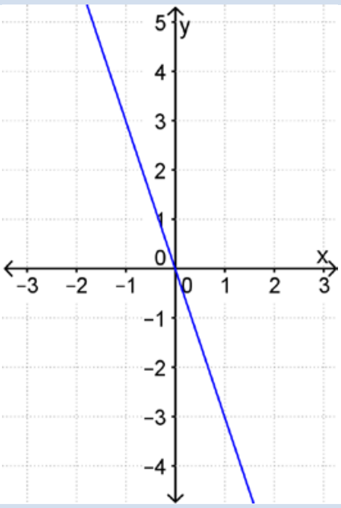
(β)



(γ)



(δ)



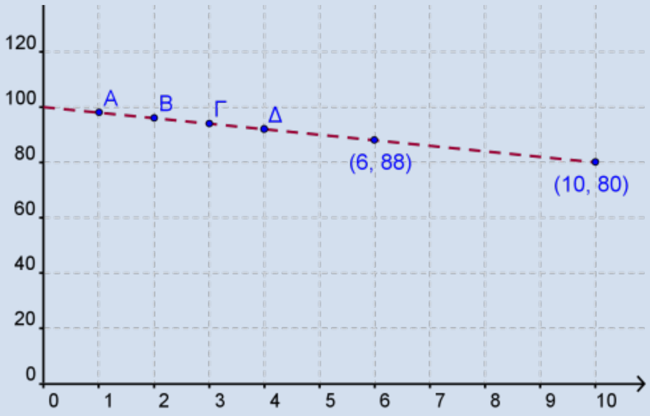
5. Τα διατεταγμένα ζεύγη ανήκουν στη 2η γραφική παράσταση (καμπύλη)

6. (α) 124 cm (β) 188 cm

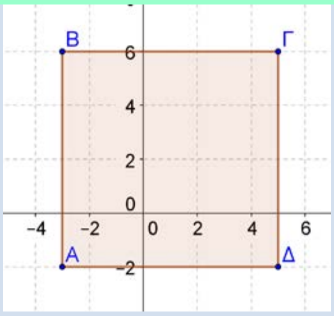
(γ) 14ο μήνα (δ) Από τον 1ο στο 2ο μήνα

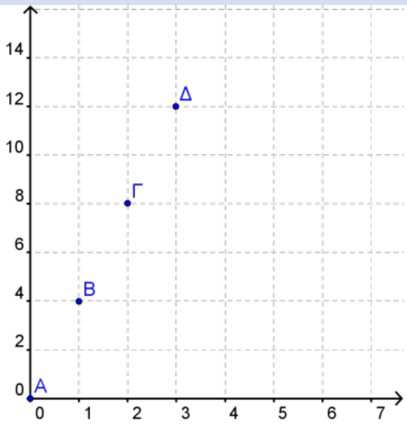
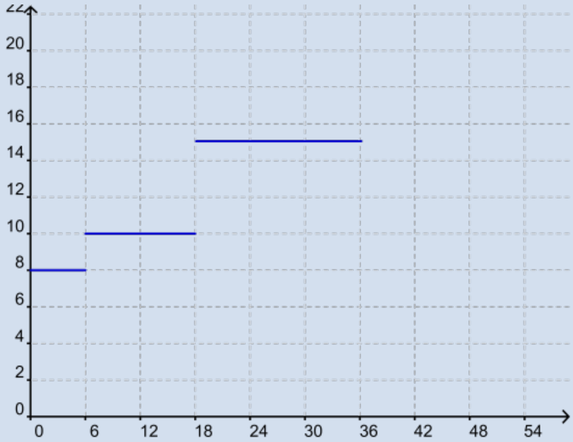
7. (α) $y = x - 3$ (β) $y = \frac{1}{2}x$

(γ) $y = -2x$ (δ) $y = 2x + 2$

8.		Β		
9.		$(\alpha) \to \Delta$, $(\beta) \to E$, $(\gamma) \to A$		
10.	(α)	160 km	(β)	320 km
	(γ)	Στα 100 km για 1 ώρα και 15 λεπτά και στα 160 km για 3 ώρες		
11.	(α)	€280	(β)	$y = 8x + 40$
	(γ)	25 *ώρες*		
12.	(α)	€250	(β)	€5500
	(γ)	12 μήνες		
13.	(α)	$y = 100 - 2x$, *όπου* x: *χρόνος και* y: *η μάζα*		
	(β)			
	(γ)	*Σε* 10 *μήνες*	(δ)	88 kg

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 110*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.		 ΑΒΓΔ τετράγωνο
2.		$A(-2,-4)$ $B(3,1)$ $\Gamma(5,-4)$ $\Delta(-4,3)$
3.	(α)	100 κιλά λάδι
	(β)	1250 κιλά ελιές
	(γ)	$y = 0{,}2x$
4.		$2 \to 8 , 3 \to 27 , 1 \to 1 , a \to a^3$, $5 \to 125$

5.	(α)	$A(2,5)$ $B(3,1)$ $Γ(5,4)$
	(β)	$A'(-2,-5)$ $B'(-3,-1)$ $Γ'(-5,-4)$
	(γ)	Στο 3^{ο} τεταρτημόριο
	(δ)	$A''(2,-10)$ $B''(3,-2)$ $Γ''(5,-8)$ στο 4^{ο} τεταρτημόριο
6.		$(γ)$
7.	(α)	$y = 4x$
	(β)	$(0,0)$ $(1,4)$ $(2,8)$ $(3,12)$
	(γ)	
8.		$Μεταξύ\ 10\ με\ 15\ λεπτών$
9.		$(α)$
10.		
11.		$y = 200x + 100$
12.	(α)	$y = 2x + 500$ (β) 400 λεπτά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 114*

<table>
<tr><th colspan="2">Δραστηριότητα</th><th>Απαντήσεις</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>(α)</td><td>
<table>
<tr><th>Κορυφές</th><th>(x, y)</th><th>$(2x, 2y)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Μάτια</td><td>$(2,2)$</td><td>$(4,4)$</td></tr>
<tr><td>$(-2,2)$</td><td>$(-4,4)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Μύτη</td><td>$(-1,1)$</td><td>$(-2,2)$</td></tr>
<tr><td>$(0,2)$</td><td>$(0,4)$</td></tr>
<tr><td>$(1,1)$</td><td>$(2,2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Στόμα</td><td>$(2,0)$</td><td>$(4,0)$</td></tr>
<tr><td>$(-2,0)$</td><td>$(-4,0)$</td></tr>
<tr><td>$(-2,-1)$</td><td>$(-4,-2)$</td></tr>
<tr><td>$(2,-1)$</td><td>$(4,-2)$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td>Αυξάνω την τετμημένη κάθε σημείου κατά 4 και την τεταγμένη κατά 3
$(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 3)$</td></tr>
<tr><td></td><td>(γ)</td><td>Θα μεγεθυνθεί 3 φορές</td></tr>
<tr><td></td><td>(δ)</td><td>➢ Η νέα φιγούρα θα είναι η ίδια με την αρχική
➢ Η νέα φιγούρα θα είναι συμμετρική της αρχικής ως προς τον x άξονα
➢ Η νέα φιγούρα θα μεταφερθεί κατά 1 μονάδα προς τα κάτω σε σχέση με την αρχική</td></tr>
<tr><td></td><td>(ε)</td><td>i. $(x, y) \rightarrow (x - 6, y + 6)$ ii. $(x, y) \rightarrow (x + 6, y + 6)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>iii. $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 7)$ iv. $(x, y) \rightarrow (x + 6, y - 7)$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>(α)</td><td>$d = \frac{138}{900}t$</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td>$t = 90\ sec$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>(α)</td><td>Η μεγαλύτερη αύξηση σημειώνεται τον πρώτο χρόνο ζωής</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td>Στην ηλικία των 12 με 14 η αύξηση είναι πολύ μικρή</td></tr>
<tr><td></td><td>(γ)</td><td>Θα σημειώνεται αύξηση μέχρι τα 18 χρόνια, ενώ μετά το ύψος θα παραμένει σταθερό</td></tr>
<tr><td>4.</td><td></td><td>(α)→Γ , (β)→Δ , (γ)→Ε , (δ)→Β , (ε)→Α</td></tr>
<tr><td>5.</td><td></td><td>1→Β , 2→C , 3→D , 4→A</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>(α)</td><td>Γ</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td>Δ</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>(α)</td><td>40 χρονών</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td>$y = 166{,}4 - 0{,}56x$</td></tr>
</table>

ΕΝΟΤΗΤΑ 9: Γεωμετρία ΙΙ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ *Σελίδα 125*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$\hat{\gamma}$ *με* $\hat{\theta}$ *και* $\hat{\varepsilon}$ *με* $\hat{\delta}$	(β)	$\hat{\gamma}$ *με* $\hat{\varepsilon}$ *και* $\hat{\theta}$ *με* $\hat{\delta}$
	(γ)	*Π.χ.* $\hat{\alpha}$ *με* $\hat{\theta}$ *και* $\hat{\gamma}$ *με* $\hat{\zeta}$		
2.	(α)	$\hat{\beta} = \hat{\varepsilon} = 80^\circ$, $\hat{\zeta} = 100^\circ$		
	(β)	$\hat{\delta} = \hat{\eta} = 110^\circ$, $\hat{\zeta} = 70^\circ$		
	(γ)	$\hat{\eta} = \hat{\delta} = \hat{\beta} = 120^\circ$, $\hat{\zeta} = 60^\circ$		
	(δ)	$\hat{\beta} = 62^\circ$, $\hat{\varepsilon} = 118^\circ$		
3.		$\hat{\beta} = \hat{\eta} = 120^\circ$, $\hat{\zeta} = 60^\circ$		
4.		$\hat{x} = 31^\circ$, $\hat{y} = 45^\circ$		
5.	(α)	$\hat{\delta} = 147^\circ$, $\hat{\varepsilon} = 47^\circ$		
	(β)	$\hat{\zeta} = 68^\circ$		
6.		$\hat{N} = 56^\circ$, $\hat{\Lambda} = 90^\circ$		
7.		$\hat{\delta} = 112^\circ$, $\hat{\gamma} = 68^\circ$		
8.		$x = 40^{o}$		
9.		$\hat{\mu} = \hat{\omega} = \hat{\eta} = 140^\circ$, $\hat{\kappa} = \hat{\varepsilon} = \hat{\zeta} = \hat{\theta} = 40^\circ$, $\hat{\gamma} = \hat{\psi} = \hat{\lambda} = 130^\circ$, $\hat{\xi} = \hat{\delta} = \hat{\nu} = \hat{o} = 50^\circ$		
10.		$\hat{\alpha} = 39^\circ$		
12.		$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ *και* $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$		

ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ *Σελίδα 133*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		Ορθογώνιο, Αμβλυγώνιο, Οξυγώνιο		
3.	(α)	Ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο		
5.	(α)	Οξυγώνιο, Σκαληνό		
	(β)	Αμβλυγώνιο, Ισοσκελές		
	(γ)	Ορθογώνιο, Σκαληνό		
6.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΟΡΘΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
7.		$\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$		
8.	(α)	$x = 64^\circ$		
	(β)	$x = 60^\circ$		
9.		$\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ Αμβλυγώνιο, Ισοσκελές		
10.	(α)	$x = 36^{o}$		

	(β)	$x = 120^o$
	(γ)	$x = 32^o$
	(δ)	$x = 113^o$
11.		Λάθος Συλλογισμός
12.		Ορθός Συλλογισμός
13.		$\hat{\alpha} = 40^\circ,\ \hat{\beta} = 72^o\ ,\ \ \hat{\gamma} = 72^o$
14.		$\hat{\beta} = 105^o$
16.	(α)	$x = 20$
	(β)	$B\hat{A}\Gamma = 30^\circ\ ,\ A\hat{B}\Gamma = 90^\circ,\ A\hat{\Gamma}B = 60^\circ$
	(γ)	$\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ\ \ ,\ \ A\hat{\Gamma}\Delta = 120^\circ$

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ *Σελίδα 141*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.		$x = 5,\ \ y = 41^\circ,\ \ \theta = 90^\circ$
5.		$1) \rightarrow \gamma\ ,\quad 2) \rightarrow \varepsilon\ ,\quad 3) \rightarrow \alpha\ ,\quad 4) \rightarrow \delta$
7.	(α)	$x = 35^\circ\ ,\ \alpha = 90^\circ$ (β) $y = 7\ cm\ \ ,\widehat{\omega} = 48^\circ$
	(γ)	$\hat{\kappa} = \hat{\mu} = 45^\circ\ ,\ \hat{\varphi} = 90^\circ$ (δ) $\hat{\beta} = 30^\circ\ ,\ \hat{\lambda} = 3\ cm$
8.		$\hat{\Gamma} = 80^\circ$ και 120°
9.		$\widehat{\omega} = 70^\circ\ ,\ \hat{\theta} = 110^\circ\ ,\ \hat{\varphi} = 30^\circ\ ,\ \hat{\psi} = 30^\circ$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 143*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	Οξυγώνιο, ισόπλευρο,
	(β)	Ορθογώνιο , σκαληνό
	(γ)	Οξυγώνιο, σκαληνό
	(δ)	Αμβλυγώνιο, ισοσκελές
2.		ΑΒΓ: ισόπλευρο, οξυγώνιο ΒΓΔ: ισοσκελές, ορθογώνιο
3.		$\hat{\varepsilon} = \hat{\theta} = \hat{\kappa} = 35^\circ\ ,$ $\hat{\zeta} = \hat{\eta} = 145^\circ\ ,$ $\hat{\psi} = \hat{\gamma} = \hat{\lambda} = 70^\circ\ ,$ $\hat{\delta} = \hat{\xi} = 110^\circ\ ,$ $\hat{\mu} = \widehat{\omega} = 75^\circ$
4.	(α)	$x = 120^\circ\ \ ,\ \hat{A} = 120^\circ\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$
5.	(α)	$x = 20$
	(β)	$x = 20$
6.		$x = 32$
8.		$\hat{A} = 55^\circ\ ,\ \hat{B} = 33^\circ\ ,\ \hat{\Gamma} = 92^\circ$
10.		Ορθογώνιο , Ισοσκελές
11.	(α)	$AB \parallel \Delta Z \parallel EH$
	(β)	$A\Gamma \parallel \Delta E$

12.		$x = 20°,\ K\hat{H}B = 70^o,\ K\hat{\Gamma}H = 45^o$
13.		$\omega = 82^o$
14.		$\hat{\Delta} = 77°$
19.	(α)	Σκαληνό
	(β)	$x = 3$
	(γ)	$a < 0$ ή $\gamma < 0$
21.		$\hat{\lambda} = \hat{\kappa} = 75°$, $\hat{\varepsilon} = 78^o$, $\hat{\mu} = 153°$, $\hat{\nu} = 27°$, $\hat{\eta} = 27°$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 148*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
5.	Ισόπλευρο

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Λόγοι - Αναλογίες

ΛΟΓΟΙ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ *Σελίδα 154*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$1 : 1$	(β)	$1 : 2$
	(γ)	$2 : 3$ ή $1 : 1{,}5$		
2.	(α)	$1 : 3$		
	(β)	$3 : 8$		
3.		$A = 2 : 3$, $B = 3 : 4$, ο B		
4.		$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$, $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$		
5.	(α)	6	(β)	28
	(γ)	3	(δ)	π.χ. $\frac{1}{3}$
6.		$1 : 220$		
7.	(α)	$1 : 2$	(β)	$1 : 2$
	(γ)	$1 : 4$		

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ *Σελίδα 159*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	28	(β)	13
	(γ)	9	(δ)	4
2.		$45\ cm$		

3.		10 km
4.		9 cm
5.		$y = 40$
6.	(α)	0,08 mm
	(β)	1,25 cm
7.		€60, €50, €40
8.	(α)	$A: 160$, $K: 200$
	(β)	$A: 200$, $K: 250$
9.		18
10.		6 m

ΠΟΣΟΣΤΑ *Σελίδα 163*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		192		
2.		€2392		
3.	(α)	80%	(β)	70
	(γ)	21,9%		
4.		10%		
5.		€45500		
6.	(α)	€562,5	(β)	€550
	(γ)	€280	(δ)	€5,25
7.	(α)	€360	(β)	3 : 1
8.		20000		
9.	(α)	20%		
	(β)	10 συνταξιούχοι και 10 παιδιά		
10.		B		
11.		Να μην υπερβαίνει τα €296,61		
12.		4%		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 166*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	$x = 1$
	(β)	$x = 9$
	(γ)	$x = 14$

	(δ)	$x = -6$		
2.		Πλάτος 3 m, Μήκος 5 m		
3.	(α)	$\frac{3}{5}$	(β)	$\frac{5}{3}$
4.		20%		
5.		$\Gamma: 80\ \ \text{και}\ A: 100$		
6.		€2100		
7.		10% , 50%		
9.		€1000, €1500, €2500		
10.		€26		
11.		€6336		
12.		€1500, €1200, €1800		
13.		€13200		
14.		1530		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 169*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	Θα μειωθεί
2.		Π.χ. $x = 5, y = 8$ ή $x = 10, y = 16$
3.		200 g υδατάνθρακες, 300 g πρωτεΐνες, 50 g λίπος
4.	(α)	Ύψος 140,4 cm, βάθος 36,6 cm, πλάτος 40,2 cm
	(γ)	1 : 8

ΕΝΟΤΗΤΑ 11: Στατιστική – Πιθανότητες

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ - ΕΙΔΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ *Σελίδα 176*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	Οι 18 μαθητές του τμήματος		
	(β)	η επίδοση στα Μαθηματικά		
	(γ)	ποιοτική		
2.	(α)	ποσοτική	(β)	ποσοτική
	(γ)	ποιοτική	(δ)	ποσοτική
	(ε)	ποιοτική		
3.	(α)	Γράμματα Πινακίδας: ποιοτική , Χρώμα Αυτοκινήτου: ποιοτική , Ταχύτητα: ποσοτική, Αρ. Επιβατών: ποσοτική, Είδος οχήματος: ποιοτική		

	(β)	$36\ km/h$	(γ)	2
	(δ)	Ασημί	(ε)	$42\ km/h$
4.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ		
5.		Ανώτατο μορφωτικό επίπεδο(ποιοτική) , Φύλο(ποιοτική), Χρονολογία (ποσοτική)		

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ *Σελίδα 185*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α)

Ημερήσια Θερμοκρασία	Αριθμός Ημερών (Συχνότητα)
21	4
22	5
23	6
24	4
25	3
26	6
27	2

	(β)	i.	9	ii.	11
		iii.	15		
2.	(α)	45, 90%		(β)	12, 24%
	(γ)	17, 34%		(δ)	47, 94%
	(ε)	4, 8%			

3. (α)

Ενδείξεις Ζαριού	Φορές που παρουσιάστηκε (Συχνότητα)
1	5
2	6
3	4
4	5
5	6
6	4

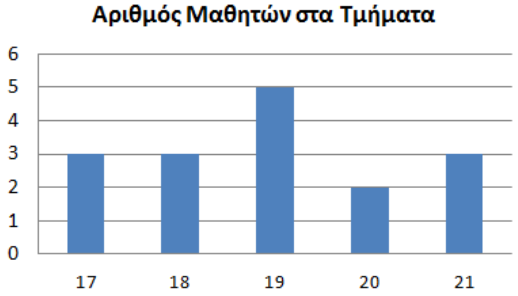
(β)

(γ)

4. (α)

Αριθμός Μαθητών	Αριθμός Τμημάτων (Συχνότητα)
17	3
18	3
19	5
20	2
21	3

(β)



5. (α) Το B_2

(β)

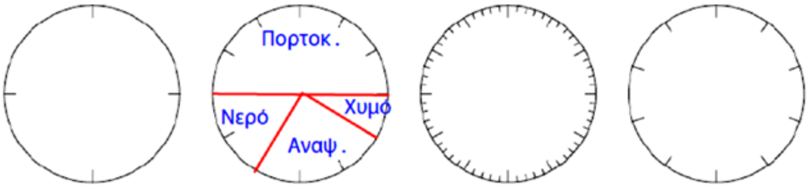
6.

Αγαπημένο Είδος Μουσικής	Αριθμός Μαθητών (Συχνότητα)
Ποπ	100
Ροκ	200
Λαϊκό	150
Έντεχνο	100
Άλλο	50

7. 198°

8. ειδήσεις: 60, ταινίες: 45, ελληνικές σειρές: 45, ξένες σειρές: 30

9.



10. (α) π.χ. Πόσα περισσότερα άτομα έχουν ως αγαπημένο κατοικίδιο τον σκύλο, σε σχέση με αυτά που έχουν ως αγαπημένο κατοικίδιο τη γάτα;

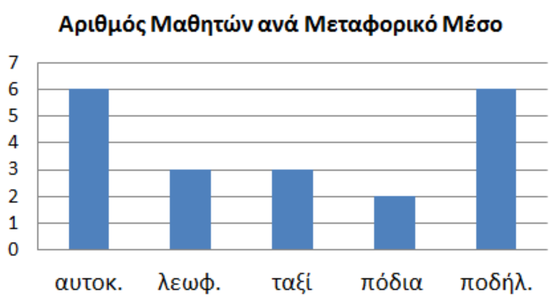
(β) π.χ. Ποιο κατοικίδιο έχουν ως αγαπημένο οι μισοί ερωτηθέντες;

11.

12. (α)

Μεταφορικό Μέσο	Αριθμός Μαθητών (Συχνότητα)
αυτοκίνητο	6
λεωφορείο	3
ταξί	3
με τα πόδια	2
ποδήλατο	6

(β)

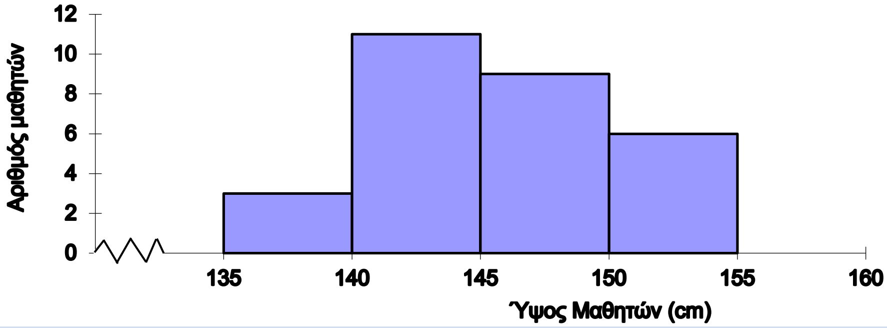


(γ) Στο Ραβδόγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα ο αριθμός των μαθητών ανά μέσο μετάβασης στη Σχολή.

Στο Κυκλικό Διάγραμμα δίνεται καλύτερα η αναπαράσταση του μέρους που αντιπροσωπεύει η κάθε κατηγορία μαθητών σε σχέση με το σύνολο των μαθητών (π.χ. με το ποδήλατο φαίνεται ότι μεταβαίνει το $\frac{1}{4}$ των μαθητών, ενώ με το ταξί λιγότεροι από το $\frac{1}{4}$ των μαθητών).

(δ) Είναι εμφανές από το Κυκλικό Διάγραμμα ότι ταξί και λεωφορείο μαζί χρησιμοποιούν περισσότεροι από το 25% των μαθητών και άρα η σχολή μπορεί να προσφέρει την υπηρεσία.

13. (α)



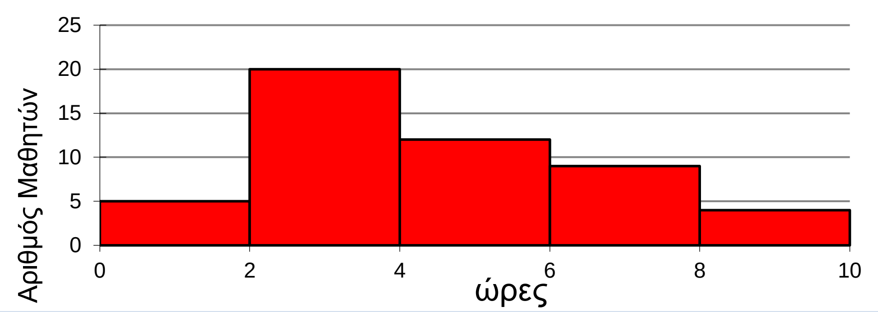
(β) 26

(γ) 80%

14. (α) Μέχρι 2 ώρες: 5, Από 2 μέχρι 4 ώρες: 20

(β) 13

(γ)



ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 195*

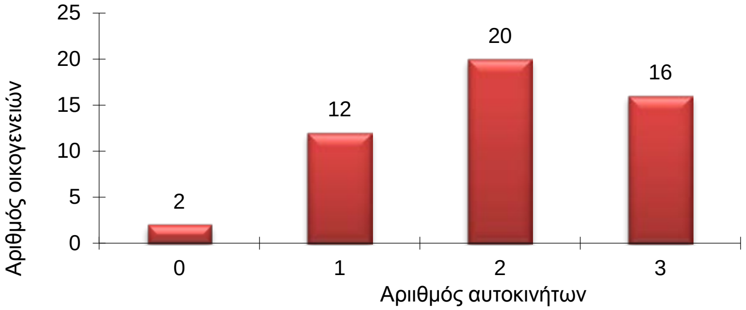
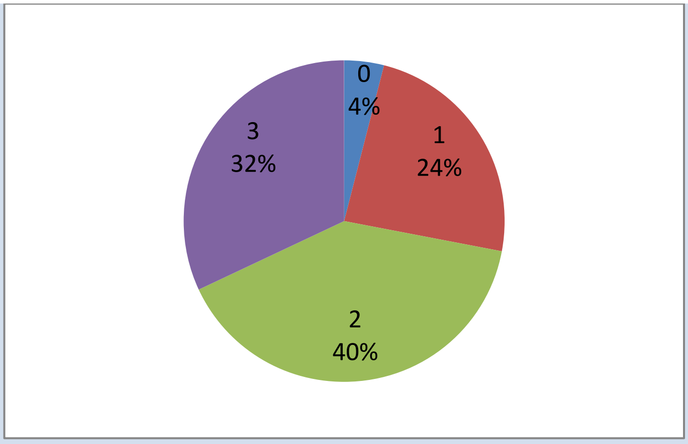
Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	{ Κ, Γ}
	(β)	{Κ, Υ, Π, Ρ, Ο, Σ}
2.		Αν έρθει άρτιος αριθμός επιλέγει πρώτος ο Χρίστος, αν έρθει περιττός επιλέγει ο Αντρέας
3.	(α)	

Δήλωση	P(A)=0	0<P(A)<1	P(A)=1
Παράδειγμα: ● ***Κλήρωση του Πασχαλινού λαχνού στο τμήμα μου.*** *Α: να κληρωθεί ο δικός μου λαχνός.*		✓	
● ***Τυχαία επιλογή ενός αριθμού από το 1 μέχρι το 200.*** *Α: να είναι ο αριθμός περιττός.*		✓	
● ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη 8.*	✓		
● ***Τυχαία επιλογή δύο μαθητών από τους 341 του σχολείου.*** *Α: να έχουν την ίδια μέρα τα γενέθλια τους.*		✓	
● ***Ρίψη ενός νομίσματος.*** *Α: να φέρω ένδειξη «γράμματα».*		✓	
● *Α: Να είναι η Πρωτοχρονιά τη 3η Δευτέρα του μήνα.*	✓		
● ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7.*			✓

4.		Η Εμέλια
5.		$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ $P(\Gamma)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ $P(\Delta)=0$ $P(E)=\frac{20}{20}=1$
6.		15
7.		Αν έχω αριθμημένες μπάλες από το 1 μέχρι το 20 σε ένα δοχείο και πρέπει να επιλέξω τυχαία μία, ποια η πιθανότητα αυτή που θα επιλέξω να φέρει αριθμό μικρότερο του 6.
8.		Λάθος διότι $\mathrm{P}(\text{πράσινης μπάλας})=\frac{\text{αριθμός πράσινων}}{\text{συνολικός αριθμός μπαλών}}=\frac{6}{15}$

9.		$\frac{7}{25}$
10.	(α)	20
	(β)	14
	(γ)	$P(A)=\frac{3}{20}\,,\quad P(B)=\frac{13}{20}\,,\quad P(\Gamma)=\frac{7}{20}$
11.		Ο δίσκος έχει αναγραμμένους τους αριθμούς: 1,3,4,5,6,7

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 198*

<table>
<tr><th colspan="2">Δραστηριότητα</th><th colspan="3">Απαντήσεις</th></tr>
<tr><td>2.</td><td>(α)</td><td colspan="3"><table><tr><th>Α</th><th><i>Β</i></th><th><i>Γ</i></th><th><i>Δ</i></th></tr><tr><td><i>Ελένη</i></td><td><i>Λουκία</i></td><td><i>Νίκη</i></td><td><i>Μαρία</i></td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td colspan="3">$100\ cm$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>(α)</td><td>20</td><td>(β)</td><td>34</td></tr>
<tr><td></td><td>(γ)</td><td>$\frac{36}{50}$</td><td>(δ)</td><td>40%</td></tr>
<tr><td></td><td>(ε)</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td></td><td>(στ)</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td></td><td>(ζ)</td><td colspan="3">$\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>(α)</td><td colspan="3">Πληθυσμός: Οι 10 μαθητές</td></tr>
<tr><td></td><td>(β)</td><td colspan="3">Μεταβλητή: επίδοση β΄ τετραμήνου στα Μαθηματικά</td></tr>
<tr><td></td><td>(γ)</td><td colspan="3">Ποσοτική</td></tr>
</table>

5.

Μπλε	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
Κόκκινο	$\frac{1}{4}$	0	0
Πράσινο	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
Κίτρινο	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{6}$
Πορτοκαλί	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

6. (α)

Αριθμός επιβατών	Συχνότητα
1	20
2	10
3	6
4	3
5	1

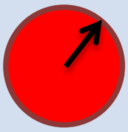
(β) Με ραβδόγραμμα ή με κυκλικό διάγραμμα

(i) $\frac{6}{40}$

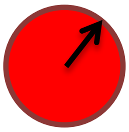
(ii) 1

(iii) 50%

8. (α)



(β)



π.χ.

(γ)

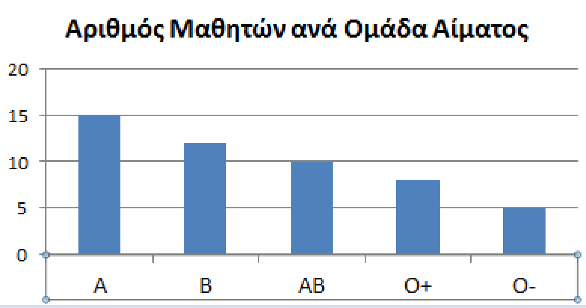
(δ)

(ε)

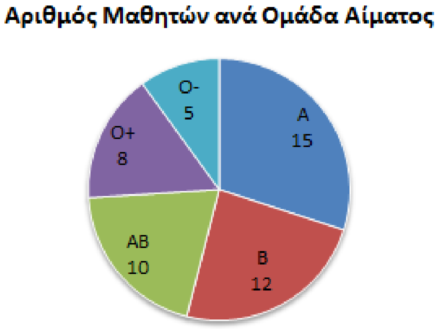
9. (α)

Ομάδα Αίματος	Αριθμός Μαθητών (Συχνότητα)
Α	15
Β	12
ΑΒ	10
O^+	8
O^-	5

(β)



(γ)



10. Φαίνεται να είναι παραπλανητική η δεύτερη παράσταση γιατί στον κατακόρυφο άξονα στον οποίο παρουσιάζεται ο αριθμός των ατόμων, δεν φαίνονται οι τιμές από 0 – 45. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σχετικό ύψος των ράβδων όπως φαίνεται να οδηγεί σε λανθασμένη εκτίμηση των διαφορών των συχνοτήτων.

11. (α) $x = 70^o$

(β) $\frac{1}{9}$

(γ) Ποιοτική

12. $P(A) = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$

$P(\Gamma) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\Delta) = \frac{5}{6}$

13. 4 μαθητές

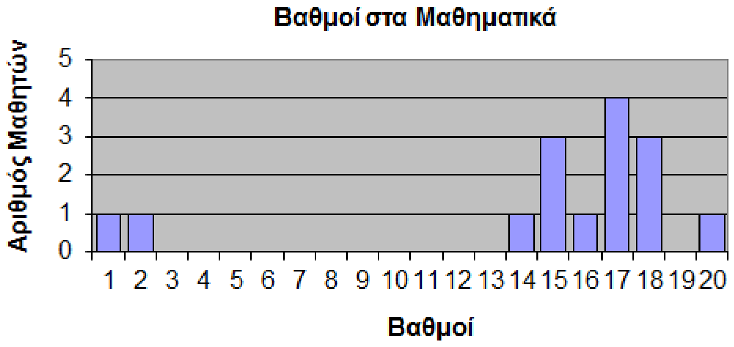
14.	(α)	$\frac{3}{5}$		
	(β)	(i) B , (ii) A , (iii) A		
15.		4 άσπρους βόλους		
16.	(α)	$P_1 = \frac{1}{5}$	(β)	$P_2 = \frac{11}{25}$
	(γ)	$P_3 = \frac{9}{50}$	(δ)	$P_4 = \frac{19}{50}$
17.		Ραβδόγραμμα		
18.	(α)	27		
	(β)	$\frac{5}{9}$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 203*

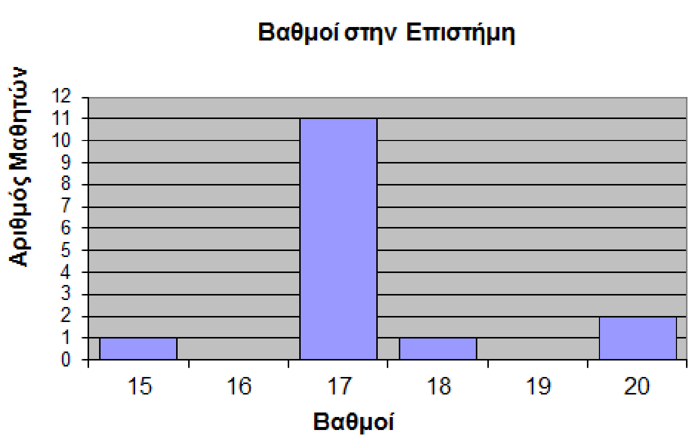
Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.

Βαθμοί στα Μαθηματικά	Αριθμός Μαθητών (Συχνότητα)
1	1
2	1
14	1
15	3
16	1
17	4
18	3
20	1



Βαθμοί στην Επιστήμη	Αριθμός Μαθητών (Συχνότητα)
15	1
17	11
18	1
20	2

		
5.		$\frac{1}{6}$
6.		Η πιθανότητα θα παραμείνει σταθερή, αν διπλασιαστεί το κάθε χρώμα.
7.	(α)	Για να ισχύουν οι λόγοι πρέπει ο συνολικός αριθμός των βόλων να είναι πολλαπλάσιο του 12. Επειδή ο ελάχιστος αριθμός είναι 20 τότε οι βόλοι μπορεί να είναι: 24, 36, 48, …
	(β)	$\frac{1}{4}$
	(γ)	
8.		$P(A) = 1\ ,\ P(B) = \frac{2}{3}\ ,\ P(\Gamma) = \frac{1}{3}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\quad\}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta:\ \alpha,\beta\in Z$ και $\beta\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\square}{\square}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσμα⇔ Δεκαδικός
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ◉ ↓ 4 ◉ → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ▚ 2 ◉ → 3 ◉ ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 $M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17